

Т Р У Д Ы

ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Выпуск 316

ср-356

К. К. ФЕДЯЕВСКИЙ

ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ
СЛОЙ КРЫЛА

Ч. II. О ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Проверено 1939



21.10.



ИЗДАНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
им. проф. Н. Е. ЖУКОВСКОГО

Москва

1937

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Настоящая работа представляет собой продолжение работы, изложенной в Трудах ЦАГИ вып. 282.

В работе делается новый вывод степенного закона сопротивления, в результате которого численный коэффициент в законе сопротивления при любом показателе степени можно выразить через критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя.

Полиномиальная интерполяция корня квадратного из напряжения трения в турбулентном пограничном слое дает возможность получить законы распределения скоростей значительно более простые, чем законы, выведенные в первой части работы. При этом в случае принятия прандтлевского пути смещения пропорционального расстоянию от стенки получаются формулы распределения скоростей, дающие в частном случае (отсутствие градиента давления и инерционных сил) формулу Прандтля—Никурадзе.

Использование этого закона распределения скоростей приводит к очень простому закону сопротивления трения, который является обобщением Кармановского логарифмического закона сопротивления на случай плоского пограничного слоя с наличием положительного градиента давления.

Попутно показывается универсальность, т. е. независимость от числа Рейнольдса отношения толщины пограничного слоя к напряжению трения у стенки, в случае подобия профилей скорости в геометрически подобно расположенных сечениях турбулентного пограничного слоя и для ламинарного пограничного слоя.

Использование закона распределения скоростей, полученного в результате полиномиальной интерполяции напряжения трения в турбулентном пограничном слое приводит к более сложному закону сопротивления.

В работе приводятся также обработка опытов Фейджа и Фолкнера для симметричного крыла Жуковского и опытов Донха и Никурадзе для плоских диффузоров, результаты которых показывают, что при наличии градиента давления, предлагаемые законы сопротивления лучше соответствуют действительности, нежели логарифмический закон сопротивления.

1. В первой части настоящей работы (см. ссылку 4) было показано, что, пользуясь полиномиальной интерполяцией напряжения трения по значениям напряжения трения и его производных на стенке и на внешней границе пограничного слоя, можно получить профили скорости с учетом особенностей внешней задачи, довольно хорошо согласующиеся с экспериментальными данными.

Необходимо еще установить связь между напряжением трения у стенок и толщиной пограничного слоя, причем эта связь должна быть установлена с учетом градиента статического давления. Вообще говоря, эту связь как раз и устанавливает интегральное соотношение Кармана, дающее зависимость между напряжением трения у стенки, толщиной пограничного слоя и их производными. Однако, для того, чтобы замкнуть задачу, надо получить еще одну зависимость между напряжением трения у стенки и толщиной пограничного слоя, при наличии которой интегральное соотношение Кармана превращается в дифференциальное уравнение относительно напряжения трения у стенки или относительно толщины пограничного слоя.

Конечно, очень желательно установить эту вторую зависимость исходя из каких-нибудь новых физических соображений. К сожалению, в настоящее время приходится довольствоваться приемом, употреблявшимся и раньше, а именно: приравниванием скоростей на внешней границе ламинарного подслоя.

Настоящая работа в основном посвящена установлению этой второй зависимости (называемой, обычно, законом сопротивления) при наличии градиента статического давления.

2. Напишем прандтлевское дифференциальное уравнение движения в плоском пограничном слое:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (1)$$

Здесь u и v — компоненты скорости по осям x и y . При этом в случае ламинарного движения это компоненты действительной скорости, а в случае турбулентного движения компоненты осредненной скорости.

ρ — массовая плотность среды;

p — давление; при этом в случае ламинарного движения это — действительное давление, а в случае турбулентного движения — осредненное давление;

τ — напряжение трения. В случае ламинарного движения

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

где μ — динамическая вязкость среды. В случае турбулентного движения

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \overline{u'v'}, \quad (3)$$

где $\overline{u'v'}$ — осредненное произведение пульсационных скоростей.

В случае турбулентного движения в уравнении (1) пренебрегается членом

$$\frac{\partial (\rho \overline{u'^2})}{\partial x}, \text{ предполагая его малость.}$$

В первой части настоящей работы (см. ссылку 4) была дана полиномиальная интерполяция напряжения трения по значениям напряжения трения и его производных на стенке и на внешней границе пограничного слоя.

Напомним условия, определяющие коэффициенты этого полинома, применяя при этом уравнение (1). Обозначая напряжение трения у стенок через τ_0 и толщину пограничного слоя через δ , будем иметь:

I. У стенки, т. е. при $y=0$ отношение:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1. \quad (I)$$

II. При $y=0$, т. е. у стенки левая часть уравнения (1) обращается в нуль, в силу чего $\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}$ и, следовательно,

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (II)$$

III. На внешней границе пограничного слоя, т. е. при $y=\delta$

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 0 \quad (III)$$

по самому определению пограничного слоя.

IV. Дифференцируя уравнение (1) по y , получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}, \quad (4)$$

так как, согласно второго дифференциального уравнения Прандтля, давление постоянно поперек пограничного слоя.

У стенки, т. е. при $y=0$ левая часть уравнения (4) обращается в нуль, поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ в силу уравнения неразрывности и поэтому

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)^2} = 0. \quad (IV)$$

V. Наконец, принимая польгаузеновское условие о равенстве нулю первой производной скорости на внешней границе пограничного слоя, следует поставить условие равенства нулю первой производной напряжений трения на внешней границе пограничного слоя¹, т. е. следует поло-

¹ В самом деле, если положить на внешней границе пограничного слоя $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, а также как это обычно делается, принять, что на внешней границе

$$\frac{\partial \left(\frac{\rho u^2}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} \cong \frac{\partial \left(\frac{\rho V^2}{2} \right)}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} = 0,$$

где V — полная скорость, а s — длина, измеряемая по линии тока, то согласно уравнения (1) на внешней границе

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0.$$

жить, что при $y = \delta$

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = 0. \quad (V)$$

3. Напишем выражение для напряжения трения на небольшом расстоянии от стенки, пользуясь разложением $\tau(y)$ в ряд Маклорена. Тогда:

$$\tau = (\tau)_{y=0} + \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} y + \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right)_{y=0} \frac{y^2}{2} + \dots \quad (5)$$

Но

$$(\tau)_{y=0} = \tau_0; \quad \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0$$

и, следовательно, можно написать

$$\tau = \tau_0 + \frac{\partial p}{\partial x} y + 0(y^3),$$

т. е. считать распределение напряжения трения линейным.

В этом случае

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 0(y^2). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (1) будем иметь:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = 0(y^3). \quad (7)$$

Таким образом, вблизи стенки существует область, в которой с точностью до y^2 левая часть дифференциального уравнения Прандтля обращается в нуль.

Естественно предполагать, что ламинарный подслон, в силу своей чрезвычайной малости, целиком находится в области, для которой левую часть дифференциального уравнения Прандтля можно полагать равной нулю.

Тогда дифференциальное уравнение движения в ламинарном подслое принимает следующий вид:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Интегрируя первый раз, получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} y + \mu \frac{\partial u}{\partial y} + c_1 = 0. \quad (9)$$

Интегрируя второй раз, будем иметь:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + \mu u + c_1 y + c_2 = 0. \quad (10)$$

Произвольные постоянные определим из условий, что при $y=0$ скорость $u=0$, а при $y=\delta_n$, т. е. на внешней границе ламинарного подслоя скорость $u=u_n$. При этом $c_2=0$

$$c_1 = \frac{\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_n^2}{2} - \mu u_n}{\delta_n}. \quad (11)$$

Очевидно, что согласно (9) напряжение трения у стенки

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = -c_1 = \mu \frac{u_n}{\delta_n} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_n}{2}. \quad (12)$$

До сих пор существовала лишь зависимость между толщиной ламинарного подслоя δ_l , динамической скоростью трения $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ и кинематической вязкостью ν полученная Карманом (см. ссылку 13), исходя из анализа размерности¹. Эта зависимость, как известно, выражается следующим образом:

$$\frac{\delta_l v_*}{\nu} = \text{const} = \alpha. \quad (13)$$

Предположим, что, подобно критическому числу Рейнольдса трубы и критическому числу Рейнольдса ламинарного пограничного слоя, существует критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя, т. е. имеет место следующая зависимость:

$$Re_{\text{лам. крит.}} = \frac{\delta_l u_l}{\nu} = \text{const} = \alpha^2. \quad (14)$$

Вообще говоря, величина критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя может зависеть от продольного градиента давления $\frac{\partial p}{\partial x}$. Однако, в силу того, что ламинарный подслой очень тонок в первом приближении, можно, вероятно, пренебречь влиянием сил давления на критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя. Так поступает и Карман, когда полагает при выводе выражения (13), что δ_l зависит лишь от напряжения трения на стенке и от физических констант ρ и μ .

Определяя произвольную постоянную c_1 в уравнении (9) из условия, что при $y=0$ $\mu \frac{du}{dy} = \tau_0$, получим $c_1 = -\tau_0$. Тогда уравнение (10) дает:

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2}. \quad (15)$$

Подставляя (15) при $y = \delta_l$ в (14), получим:

$$\begin{aligned} Re_{\text{лам. крит.}} &= \frac{\delta_l u_l}{\nu} = \frac{\tau_0 \delta_l^2}{\mu \nu} + \frac{1}{\mu \nu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_l^3}{2} = \\ &= \frac{v_*^2 \delta_l^2}{\nu^2} + \frac{1}{\nu^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta_l^3}{2} = \text{const} = \alpha^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Сопоставление первого члена выражения (16) с выражением (13) указывает, что кармановский критерий $\frac{\delta_l v_*}{\nu}$ является корнем квадратным из критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя в предположении линейного распределения скоростей в ламинарном подслое. Поскольку постоянство кармановского критерия для ламинарного пограничного слоя при внутренней задаче прекрасно подтверждается опытом, есть основание ожидать, что постоянство обобщенного критерия будет иметь место в случае внешней задачи. Следует отметить, что второй член выражения (16) может составить для верхней поверхности крыла при наличии угла атаки более 4% α^2 .

¹ Принимая линейное распределение скоростей в ламинарном подслое, т. е. считая, что скорость на внешней границе ламинарного подслоя

$$u_l = \frac{\tau_0 \delta_l}{\mu} = \frac{v_*^2 \delta_l}{\nu},$$

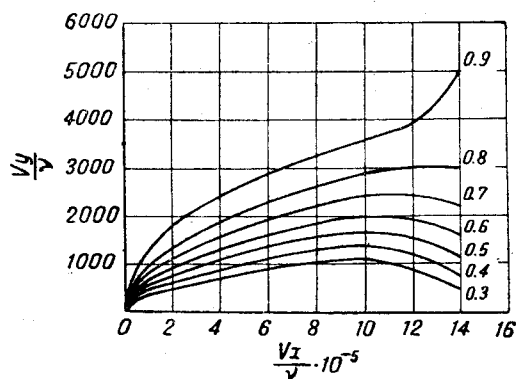
Карман подставлял δ_l из выражения (13) и получил еще и следующую зависимость для скорости на внешней границе ламинарного подслоя

$$u_l = \frac{v_*^2 \delta_l}{\nu} = \frac{v_*^2 \alpha \nu}{\nu v_*} = \alpha v_*.$$

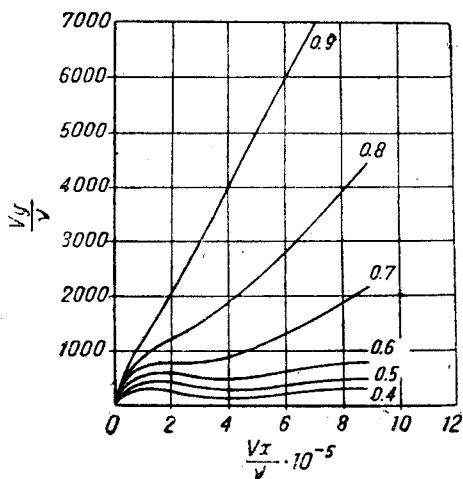
Поскольку значение величины α колеблется, примерно, от 10 до 12,5 значения критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя могут быть приняты, примерно, в пределах от 100 до 150.

Естественно, может возникнуть вопрос, почему величина критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя так сильно отличается от величины критического числа Рейнольдса ламинарного слоя или критического числа Рейнольдса трубы (которое, как известно, равно около 2000).

Некоторое объяснение возможности существования столь большой разницы в величинах критических чисел Рейнольдса дают опыты Драйдена (см. ссылку 8) по замеру степени турбулентности внутри пограничного слоя. На фиг. 1, 2, 3 и 4 мы воспроизводим результаты этих интереснейших опытов.



Фиг. 1



Фиг. 2

На фиг. 1 и 2 даны изотакхи в пограничном слое пластинки. По осям координат отложены расстояния от передней кромки x и расстояния от поверхности пластины y , приведенные к безразмерному виду путем умножения на скорость потока V и деления на кинематическую вязкость ν .

Цифры у кривых дают значение отношения скоростей $\frac{u}{V}$. Опыты, соответствующие фиг. 1, были произведены в трубе при степени турбулентности $\varepsilon = \frac{V\sqrt{V'^2}}{V} 100 = 0,5$.

Опыты, соответствующие фиг. 2, были произведены в трубе за турбулизирующей решеткой при степени турбулентности в 3%. Переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный в первом случае имел место при числе Рейнольдса $\frac{Vx}{\nu} \cong 1\,100\,000$, а во втором случае при числе Рейнольдса, равном $\frac{Vx}{\nu} \cong 100\,000$.

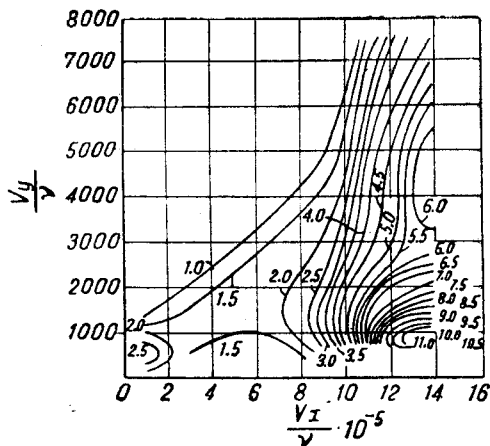
На фиг. 3 и 4 даны кривые равных степеней турбулентности. Эти кривые, которые могли бы быть названы изотурбами или изопульсами, на фиг. 3 соответствуют степени турбулентности набегающего потока в 0,5%, т. е. изотакхам на фиг. 1, а кривые на фиг. 4 соответствуют степени турбулентности набегающего потока в 3%, т. е. изотакхам на фиг. 2. Цифры на кривых фиг. 3 и 4 дают значение процента турбулентности $\varepsilon = \frac{V\sqrt{u'^2}}{V} 100$, где $\overline{u'^2}$ — есть среднее квадратичное продольного компонента пульсаций.

Из совокупного рассмотрения фиг. 1 и 3, а также 2 и 4 следует, что:

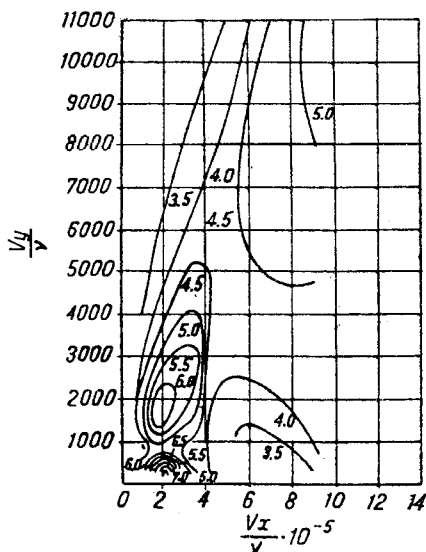
1) В участке пограничного слоя, который обычно принято называть ламинарным, имеют место пульсации¹, в три раза превосходящие пульсации в набегающем потоке. Эти пульсации вызваны, повидимому, передней кромкой и, как показывают осцилограммы, они неустойчивы.

2) В переходном участке имеют место чрезвычайно интенсивные пульсации, достигающие до 22-кратных пульсаций набегающего потока (см. фиг. 3).

3) В турбулентной части пограничного слоя пульсации значительно меньше, чем в переходном участке, но все же значительно больше, чем в набегающем потоке (фиг. 4).



Фиг. 3



Фиг. 4

Все вышеуказанное наводит на мысль, что различие между ламинарным и турбулентным потоком заключается не в отсутствии или наличии пульсаций скорости по времени, а в отсутствии или наличии корреляции между компонентами пульсации скорости в данной точке.

В силу наличия внутри турбулентного слоя пульсаций, значительно превосходящих пульсации набегающего потока (при этом следует иметь в виду, что на диаграммах Дрейдена нанесены пульсации, отнесенные к скорости набегающего потока, тогда как пульсации, отнесенные к местным скоростям будут значительно больше), представляется естественным, что критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя меньше критического числа Рейнольдса ламинарного слоя или трубы.

Подставляя (14) в (12), получим закон сопротивления:

$$\tau_0 = \frac{\mu}{\nu} \frac{u_\tau^2}{\alpha^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 \nu}{u_\tau} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\alpha^2} \rho u_\tau^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\nu}{u_\tau} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (17)$$

который может быть легко использован во всех тех случаях, когда скорость на внешней границе ламинарного подслоя может быть выражена из распределения скоростей в турбулентной части пограничного слоя с помощью зависимости (14) в явном виде.

¹ Наличие пульсаций в ламинарном потоке было и ранее отмечаемо рядом исследователей. Так, например, Дель-Нунцио (см. ссылку 19) указывает на наличие пульсаций в круглых и квадратных трубах при скоростях значительно меньших критических. Симонс (см. ссылку 23) обнаружил пульсацию скорости в пограничном слое тела вращения и т. д.

4. В качестве примера, где скорость u_δ может быть получена в явном виде из распределения скоростей в турбулентной части пограничного слоя, рассмотрим случай степенного распределения скоростей, т. е. положим:

$$u = u_\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^n, \quad (18)$$

здесь u_δ — скорость на внешней границе турбулентного пограничного слоя, δ — толщина турбулентного пограничного слоя; n — показатель степени, несколько зависящий от числа Рейнольдса.

Подставляя (14) в (18) при $y = \delta_\lambda$, будем иметь:

$$u_\lambda = u_\delta \left(\frac{\delta_\lambda}{\delta} \right)^n = u_\delta \left(\frac{\alpha^2 \nu}{u_\lambda \delta} \right)^n.$$

Откуда

$$u_\lambda^{1+n} = u_\delta \frac{\alpha^{2n} \nu^n}{\delta^n}$$

и

$$u_\lambda = u_\delta^{\frac{1}{n+1}} \frac{\alpha^{\frac{2n}{n+1}} \nu^{\frac{n}{n+1}}}{\delta^{\frac{n}{n+1}}}. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (17), получим:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{\alpha^2} \rho u_\delta^{\frac{2}{n+1}} \frac{\alpha^{\frac{4n}{n+1}} \nu^{\frac{2n}{n+1}}}{\delta^{\frac{2n}{n+1}}} - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\nu \delta^{\frac{n}{n+1}}}{\alpha^{\frac{2n}{n+1}} \nu^{\frac{n}{n+1}} u_\delta^{\frac{1}{n+1}}} \frac{\partial p}{\partial x} = \\ &= 2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \frac{\rho u_\delta^2}{2} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}} - \frac{1}{2} \alpha^{\frac{2}{n+1}} \frac{\nu}{u_\delta} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{\frac{n}{n+1}} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Сравнивая (20) с кармановским степенным законом сопротивления [см. ссылку 3, формулу (14)]:

$$\tau_0 = \zeta \frac{\rho u_\delta^2}{2} \left(\frac{u_\delta \delta}{\nu} \right)^{-\frac{2n}{n+1}},$$

мы видим, что первый член выражения (20) в точности соответствует кармановскому степенному закону, тогда как второй член очень немного изменяет напряжение трения за счет влияния градиента давления на профиль скоростей в ламинарном подслое.

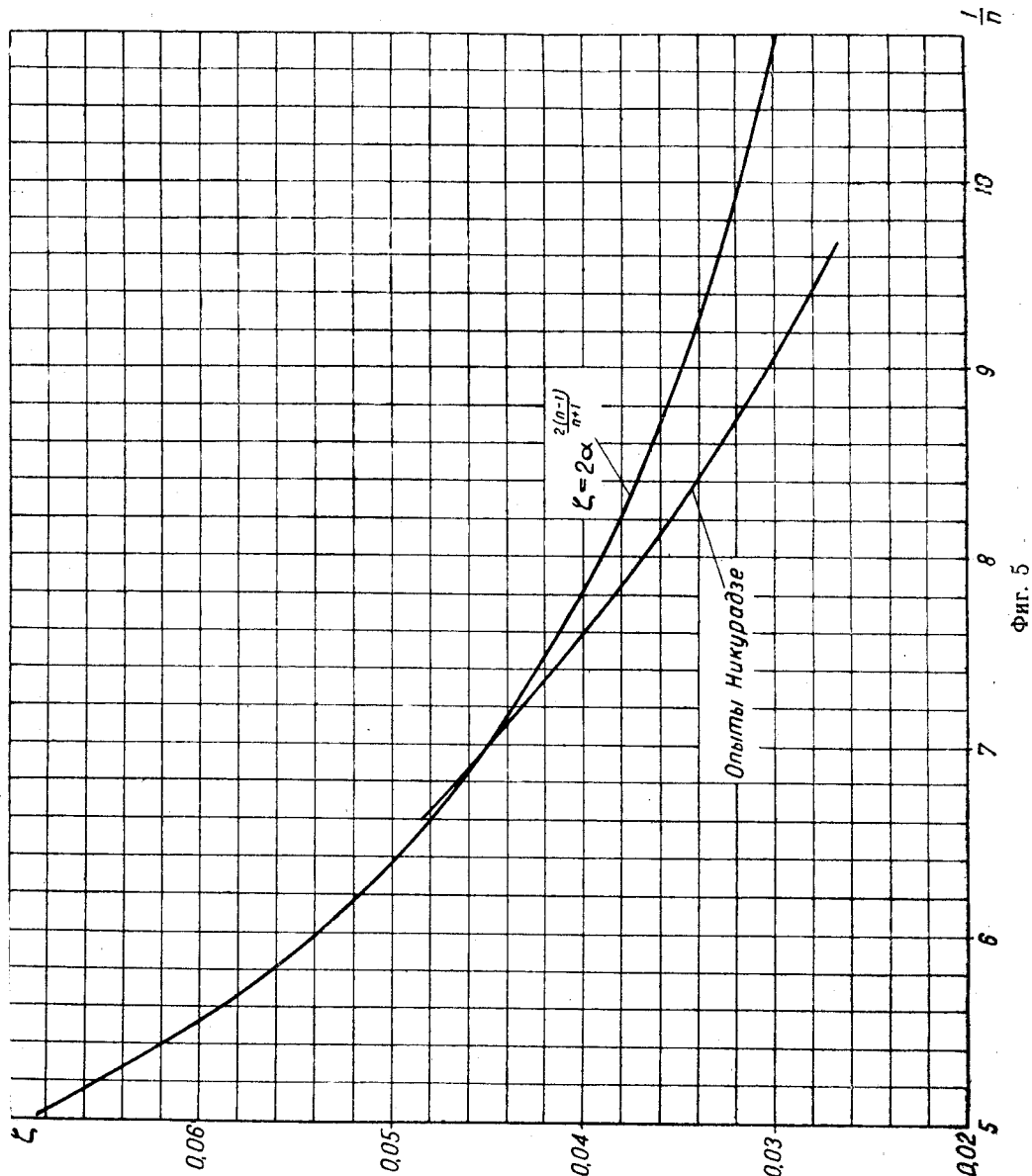
При этом следует отметить, что при постоянном показателе степени и при прочих равных условиях с увеличением числа Рейнольдса пограничного слоя первый член выражения (20) падает, тогда как второй растет.

Конечно, следует иметь в виду, что формула (20) не может учитывать влияния градиента давления на профиль скоростей при внешней задаче, так как хорошо известно, что при наличии инерционных сил профиля скорости отнюдь не подобны друг другу (см. I часть настоящей работы фиг. 1, 2 и 3).

В этом случае нельзя уже применять степенной закон с постоянным показателем.

Как известно, на основании многочисленных экспериментов при $n = \frac{1}{7}$ коэффициент $\zeta = 0,045$, сопоставляя это значение коэффициента с значением

величины $2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}}$ при $n=\frac{1}{7}$, мы получим $\alpha=12,548$. Это обстоятельство указывает, что величина кармановского критерия для ламинарного подслоя, полученная из степенного закона сопротивления, довольно хорошо согласуется с ранее полученными значениями для α на основании распределения скоростей. Так, у Кармана $\alpha=11,5$ (см. ссылку 15), у Г. А. Гуржиенко (см. ссылку 1) $\alpha=10,47$.



Фиг. 5

Выражение, полученное для константы кармановского степенного закона сопротивления:

$$\zeta = 2\alpha^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \quad (21)$$

дает возможность подсчитывать коэффициент ζ при различных n . Раньше коэффициент ζ мог быть определен только на основании экспериментов.

На фиг. 5 нанесены значения коэффициента ζ , согласно формулы (21) при $\alpha = 12,548$. Для сравнения на ту же диаграмму нанесены значения коэффициента ζ , полученные при опытах Никурадзе (см. ссылку 17) в прямых, круглых, гладких трубах. Зависимость коэффициента ζ от показателя n определялись по фиг. 44 работы Никурадзе, которая воспроизводится нами на фиг. 6. При заданном значении абсциссы $\log \frac{ud}{\nu}$ снимались значения величин m и ζ , а затем показатель степени n определялся из соотношения:

$$m = -\frac{2n}{n+1}.$$

Несмотря на имеющиеся расхождения между теоретическими и экспериментальными значениями ζ при малых n , мы имеем теперь возможность, пользуясь формулой (21), оценить коэффициент ζ для больших значений показателя и для которых не имеется опытных данных.

Интересно отметить, что при использовании коэффициента, определенного по формуле (21) для расчета толщин пограничного слоя тела вращения при показателе $n = \frac{1}{6}$, были получены толщины пограничного слоя, хорошо согласующиеся с экспериментом.

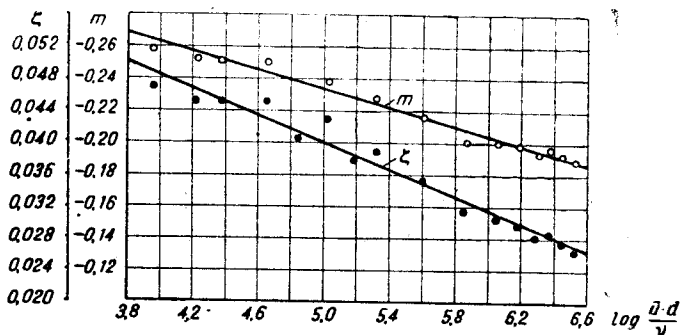
5. Ввиду того, что кривые распределения скоростей нельзя достаточно удовлетворительно выразить с помощью степенной зависимости, необходимо при получении закона сопротивления исходить из распределения скоростей, полученных, используя профиль напряжения трения, соответствующий внешней задаче.

В первой части настоящей работы указывалось, каким образом эти профили могут быть получены. Однако, формула распределения скоростей, полученная при этом [см. формулу (22) первой части работы] настолько сложна, что пользование ею представляет значительные затруднения. Кроме того, эта формула получена при использовании совокупности всего лишь трех условий (I), (II) и (III).

Чтобы получить более простые формулы распределения скоростей при этом с использованием также и условий (IV) и (V), представим корень квадратный из напряжения трения в пограничном слое отнесенного к напряжению трения у стенок в виде полинома:

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = B_0 + B_1 \eta + B_2 \eta^2 + B_3 \eta^3 + B_4 \eta^4 + \dots, \quad (22)$$

коэффициенты которого определяются из условий, имеющих место для $\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$ и его производных у стенки и на внешней границе пограничного слоя, используя для этого условие, имеющее место для $\frac{\tau}{\tau_0}$ и его производных.



Фиг. 6

I. У стенки, т. е. при $\frac{y}{\delta} = \eta = 0$ мы имели

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 \quad (I)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = 1. \quad (I')$$

II. При $\eta = 0$ мы имели:

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta} = \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)^2}{\partial \eta} = 2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} = A_1, \quad (II)$$

откуда

$$\left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2} A_1. \quad (II')$$

III. На внешней границе пограничного слоя, т. е. при $\eta = 1$ мы имели

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 0 \quad (III)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} = 0. \quad (III')$$

IV. У стенки, т. е. при $\eta = 0$ мы имели:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta^2} &= \frac{\partial^2 \left(\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \right)^2}{\partial \eta^2} = 2 \left[\left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}} \frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (IV)$$

откуда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right)_{\eta=0} &= - \left(\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0}^2 = \\ &= - \frac{1}{4} \frac{\delta^2}{\tau_0^2} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 = - \frac{1}{4} A_1^2. \end{aligned} \quad (IV')$$

V. Положим равенство нулю второй производной на внешней границе пограничного слоя. Тогда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial \left(\frac{u}{v_*} \right)}{\partial \eta} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}},$$

где $\frac{l}{\delta}$ есть безразмерный путь смещения, будем иметь:

$$\left[\frac{\partial^2 \left(\frac{u}{v_*} \right)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = \left[\frac{\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} \frac{l}{\delta} - \frac{\partial \left(\frac{l}{\delta} \right)}{\partial \eta} \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\left(\frac{l}{\delta} \right)^2} \right]_{\eta=1} = 0.$$

В силу того, что при $\eta = 1$

$$\frac{l}{\delta} \neq 0, \quad \frac{l}{\delta} \neq \infty, \quad \frac{\partial \left(\frac{l}{\delta} \right)}{\partial \eta} \neq \infty$$

написанное равенство может иметь место при

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = 0. \quad (V')$$

Определяем коэффициенты полинома (22) из выявленных нами условий.

а) При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V'), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -\frac{1}{8} A_1^2, \\ B_3 &= -4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2; \quad B_4 = 3 + A_1 - \frac{A_1^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

б) При использовании совокупностью условий (I'), (II'), (III') и (IV') будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -\frac{1}{8} A_1^2; \\ B_3 &= -1 - \frac{A_1}{2} + \frac{A_1^2}{8}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

в) При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III') и (V'), будем иметь:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -3 - A_1; \quad B_3 = 2 + \frac{A_1}{2}. \quad (24')$$

г) Наконец, при совокупности условий (I'), (II') и (III') будем иметь:

$$B_0 = 1; \quad B_1 = \frac{A_1}{2}; \quad B_2 = -1 - \frac{A_1}{2}. \quad (23')$$

Интерполируя напряжения трения с помощью полинома (1) первой части этой работы или с помощью полинома (22) этой части, мы можем встретиться со значением критерия A_1 , при которых вблизи внешней границы пограничного слоя, т. е. при η , близких единице, появятся отрицательные значения напряжения трения, что, конечно, непригодно.

Поэтому, необходимо исследовать диапазоны значений критерия A_1 , в которых полиномы напряжения трения или полиномы корня квадратного из напряжения трения при η , близком единице, бывают всегда положительны.

Особенный интерес представляет для нас определение этого диапазона для полиномов, полученных при максимальном количестве граничных условий, т. е. при совокупности условий (I), (II), (III), (IV) и (V)—для полинома трения и совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V')—для полинома, интерполирующего корень квадратный из напряжения трения.

Поскольку при совокупности этих условий первая производная полиномов в точке $\eta = 1$ равна нулю, определим значения A_1 , при которых происходит перемена знака вторых производных полиномов в точке $\eta = 1$.

При совокупности условий (I), (II), (III), (IV) и (V) будем иметь [см. первую часть работы стр. 8, формулы (4)].

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta} = A_1 + 3A_3 \eta^2 + 4A_4 \eta^3; \quad \left[\frac{\partial^2 \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = 6A_3 + 12A_4.$$

Определяем значение параметра A_1 , при котором вторая производная меняет свой знак из уравнения

$$6A_3 + 12A_4 = -24 - 18A_1 + 36 + 24A_1 = 6A_1 + 12 = 0,$$

откуда

$$A_1 = -2.$$

Таким образом, в точке $\eta = 1$ будет минимум при значениях

$$A_1 > -2. \quad (25)$$

При совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') будем иметь:

$$\frac{\partial \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta} = \frac{A_1}{2} - \frac{A_1^2}{4} \eta + 3B_3 \eta^2 + 4B_4 \eta^3$$

и

$$\left[\frac{\partial^2 \sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\partial \eta^2} \right]_{\eta=1} = -\frac{A_1^2}{4} + 6B_3 + 12B_4.$$

Определяем значение параметра A_1 , при котором вторая производная меняет свой знак из уравнения:

$$\begin{aligned} -\frac{A_1^2}{4} + 6B_3 + 12B_4 &= -\frac{A_1^2}{4} - 24 - 9A_1 + \frac{3}{2}A_1^2 + \\ &+ 36 + 12A_1 - \frac{3}{2}A_1^2 = -\frac{1}{4}A_1^2 + 3A_1 + 12 = 0, \end{aligned}$$

откуда:

$$(A_1)_1 = 15,15; \quad (A_1)_2 = -3,15.$$

Иными словами, в точке $\eta = 1$ минимум будет при

$$-3,15 < A_1 < 15,15. \quad (25')$$

Таким образом, применение полинома (22) при совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') допустимо лишь в диапазоне изменения параметра A_1 от $-3,15$ до $15,15$ и возможно даже в несколько меньшем диапазоне, как это будет показано ниже.

При использовании совокупности условий (I'), (II'), (III') и (V') в точке $\eta = 1$ минимум будет при

$$A_1 > -6, \quad (25'')$$

т. е. интерполяция (22) при совокупности этих условий пригодна при всех положительных значениях параметра A_1 . Это относится также к совокупности условий (I'), (II') и (III').

Естественно, встает вопрос о том, как будет изменяться параметр A_1 при переходе от модели к натуре, т. е. с изменением чисел Рейнольдса. Возможно, что при переходе от модели к натуре параметр A_1 , при положительных градиентах давления, настолько возрастет, что невозможно будет пользоваться интерполяцией (22).

Для выяснения этого обстоятельства рассмотрим, как изменяются величины, входящие в параметр

$$A_1 = \frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} \quad (26)$$

при переходе от модели к натуре. При этом, чтобы оценить изменение δ и τ_0 примем, что зависимость их от числа Рейнольдса достаточно хоро-

шо описывается степенным законом, т. е. будем полагать, что для сходственных сечений модели и натуры профили скоростей подобны.

Как известно (см., например, ссылку 3, стр. 20) для турбулентного пограничного слоя

$$\delta \sim L(Re)^{\frac{m}{1-m}}, \quad (27)$$

где L —длина тела (по потоку);

$$Re = \frac{VL}{\nu},$$

где V —скорость набегающего потока; ν —кинематическая вязкость $m = -\frac{2n}{1+n}$ (n —показатель степени в степенном законе распределения скоростей).

Напряжение трения у стенки [см. ссылку 3, стр. 10, формула (15)]:

$$\tau_0 = \zeta \frac{\rho V^2}{2} f^{1+\frac{m}{2}} \left(\frac{V\delta}{\nu} \right)^m \sim \rho V^2 \left(\frac{V\delta}{\nu} \right)^m, \quad (28)$$

так как $f = 1 - \frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho V^2}$ не зависит от числа Рейнольдса, если предпола-

гать, что изменение толщин пограничного слоя при переходе от модели к натуре не изменяет распределения давления на внешней границе пограничного слоя. Подставляя (27) в (28), получим:

$$\tau_0 \sim \rho V^2 \left(\frac{VL}{\nu} Re^{\frac{m}{1-m}} \right)^m. \quad (29)$$

Наконец

$$\frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{\rho V^2}{L}. \quad (30)$$

Подставляя (27), (29) и (30) в (26), будем иметь:

$$A_1 = \frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} \frac{L Re^{\frac{m}{1-m}} \rho V^2}{L \rho V^2 \left(\frac{VL}{\nu} Re^{\frac{m}{1-m}} \right)} \sim 1. \quad (31)$$

Таким образом, в этом случае параметр A_1 не изменяется при переходе от модели к натуре. Независимость в этом случае параметра A_1 от числа Рейнольдса, т. е. его универсальность объясняется универсальностью в этом случае отношения $\frac{\delta}{\tau_0}$, так как $\frac{\partial p}{\partial x}$, согласно (30), универсально само по себе.

Если рассматривать зависимость δ и τ_0 от числа Рейнольдса не по степенным формулам, а по универсальным логарифмическим формулам, то для пластинок по Карману [см. ссылку 5, формулу (290)], мы будем иметь:

$$\delta = 0,348x \sqrt{C_{f_m}}, \quad (32)$$

где C_{f_m} есть местный коэффициент трения пластинок. Тогда отношение

$$\frac{\delta}{\tau_0} \sim \frac{\sqrt{C_{f_m}}}{C_{f_m}} = \frac{1}{\sqrt{C_{f_m}}}, \quad (33)$$

т. е. не универсально. Это имеет место, повидимому, из-за того, что при

получении формулы (32) из основной зависимости Кармана [см., например, ссылку 5, формулу (285)]:

$$Re = \frac{5e^{-c_1}}{6x^3 \sqrt{2}} z^3 \left[e^z \left(1 - \frac{58}{15} \frac{1}{z} + \frac{86}{15} \frac{1}{z^2} \right) - \frac{86}{15} \frac{1}{z^2} \right], \quad (34)$$

где

$$z = x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}},$$

пренебрегали членами, содержащими в знаменателе z и z^2 . В самом деле, если пренебречь только членами, содержащими в знаменателе z^2 , то мы будем иметь:

$$Re = \frac{5e^{-c_1}}{6x^3 \sqrt{2}} x^2 \frac{2}{C_{f,м}} e^{x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}}} \left(1 - \frac{58}{15} \frac{\sqrt{C_{f,м}}}{\sqrt{2} x} \right)$$

или

$$Re C_{f,м} \frac{1}{1 - k C_{f,м}^{1/2}} = \text{const} e^{x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}}},$$

где

$$k = \frac{58}{15} \frac{1}{\sqrt{2} x}.$$

Отсюда закон сопротивления для пластинок будет:

$$\ln \left(Re C_{f,м} \frac{1}{1 - k C_{f,м}^{1/2}} \right) = \text{const} + x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}} \quad (35)$$

вместо закона

$$\ln (Re C_{f,м}) = \text{const}_1 + x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}}, \quad (36)$$

который получался при пренебрежении членами, содержащими в знаменателе z и z^2 .

Сопоставляя (35) с формулой Кармана [см. ссылку 5, формулу (282)]:

$$\ln (Re_{\delta} C_{f,м}^{1/2}) = \text{const}_2 + x \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}}, \quad (37)$$

где

$$Re_{\delta} = \frac{V_{\delta}}{\nu},$$

получим:

$$\ln \left[\frac{\delta (1 - k C_{f,м}^{1/2})}{x C_{f,м}^{1/2}} \right] = \text{const}_3,$$

откуда будем иметь:

$$\delta = 0,348 x C_{f,м}^{1/2} \frac{1}{1 - k C_{f,м}^{1/2}} \quad (38)$$

вместо зависимости (32), полученной из сопоставления зависимости (37) и (38).

Теперь отношение:

$$\frac{\delta}{\tau_0} \sim \frac{C_{f,м}^{1/2}}{C_{f,м} (1 - k C_{f,м}^{1/2})} = \frac{1}{C_{f,м}^{1/2} (1 - k C_{f,м}^{1/2})}. \quad (39)$$

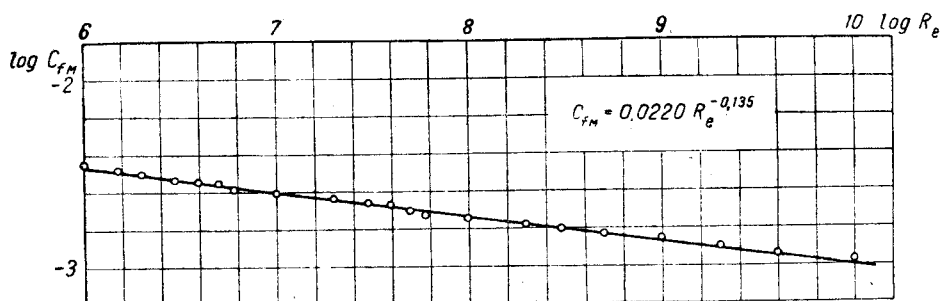
Сопоставляя выражения (33) и (39), мы видим, что при уточнении решения отношения $\frac{\delta}{\tau_0}$ слабее зависит от числа Рейнольдса¹.

Для того, чтобы отношение $\frac{\delta}{\tau_0}$ было универсально, необходимо, чтобы решение, уравнение (34) давало

$$\ln (Re C_{f,м}^{3/2}) = \text{const} + \alpha \sqrt{\frac{2}{C_{f,м}}}.$$

Зависимость местного коэффициента трения от числа Рейнольдса (36) хорошо аппроксимируется формулой²:

$$C_{f,м} = 0,022 Re^{-0,135}. \quad (36')$$



Фиг. 7

На фиг. 7 представлена зависимость $\log C_{f,м}$ от $\log Re$. Точки соответствуют зависимости (36) и заимствованы из табл. 1 работы Кармана: „Турбулентность и поверхностное трение“ (см. ссылку 15). Прямая соответствует формуле (36').

Таким образом, если даже считать, что отношение $\frac{\delta}{\tau_0}$ следует зависимости (33), мы, подставляя (36') в (33), получим:

$$\frac{\delta}{\tau_0} \sim \frac{1}{\sqrt{C_{f,м}}} \sim Re^{0,0675}. \quad (33)$$

т. е. будем иметь весьма слабую зависимость отношения $\frac{\delta}{\tau_0}$ от числа Рейнольдса.

Интересно также отметить, что универсальность отношения $\frac{\delta}{\tau_0}$ имеет место и при ламинарном пограничном слое. В самом деле, например, для пластины в ламинарном пограничном слое [см., например, ссылку 2 стр. 9 формулу (6)].

$$\delta \sim Re^{-\frac{1}{2}}. \quad (40)$$

¹ В самом деле, если для оценки изменения $C_{f,м}$ по числам Рейнольдса принять формулу

$$C_{f,м} = 0,022 Re^{-0,135},$$

то при переходе от $Re = 2 \cdot 10^6$ (модель) к $Re = 20 \cdot 10^6$ (натура) отношение $\frac{\delta}{\tau_0}$ возрастает, согласно зависимости (33) на 16,8%, а согласно зависимости (39) всего на 6,8%.

² Эта аппроксимация была по моей просьбе любезно выполнена инж. Н. Н. Фоминой.



$$\tau_0 \sim \mu V \sqrt{\frac{V}{\nu L}} \sim \rho V^2 Re^{-\frac{1}{2}} \sim Re^{-\frac{1}{2}}, \quad (41)$$

откуда

$$\frac{\delta}{\tau_0} \sim 1.$$

Для внутренней задачи мы также имеем универсальность¹ параметра A_1 . Во всяком случае при переходе от модели к натуре мы вправе ожидать либо неизменности параметров A_1 для сходственных (геометрически подобно расположенных сечений), либо очень незначительного их изменения.

6. Для получения закона сопротивления в пределе переходящего в логарифмический закон сопротивления Кармана (см. ссылку 14), положим, следуя Прандтлю (см. ссылку 21) безразмерный путь смещения

$$\frac{l}{\delta} = \chi \eta, \quad (42)$$

где χ — универсальная константа, величина которой определяется из опыта.

Выражая напряжение трения с помощью прандтлевского закона пути смещения (см. ссылку 21)

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2, \quad (43)$$

получим следующее дифференциальное уравнение.

$$\frac{d\left(\frac{u}{v_*}\right)}{d\eta} = \frac{d\varphi}{d\eta} = \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}}. \quad (44)$$

Интегрируя в пределах от 1 до η , будем иметь:

$$\varphi = \frac{u}{v_*} = \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}} d\eta. \quad (45)$$

Подставляя (22) и (42) в (45), получаем распределение скоростей:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{u}{v_*} &= \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{\chi} \int_1^\eta \left(\frac{B_0}{\eta} + B_1 + B_2 \eta + B_3 \eta^2 + B_4 \eta^3 + \dots \right) d\eta = \\ &= \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{\chi} \left[B_0 \ln \eta + B_1 \eta + B_2 \frac{\eta^2}{2} + B_3 \frac{\eta^3}{3} + B_4 \frac{\eta^4}{4} + \dots \right]_1^\eta. \end{aligned} \quad (46)$$

В частности, подставляя значения коэффициентов B_0 , B_1 , B_2 , B_3 и B_4 , согласно (23), в выражение (46), будем иметь:

¹ В самом деле при любом числе Рейнольдса для нерасширяющегося канала

$$A_1 = \frac{r \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} = -1,$$

так как произведение половины ширины канала r на градиент давления

$$r \frac{\partial p}{\partial x} = -\tau_0.$$

Аналогично для круглой трубы:

$$A_1 = \frac{r \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} = -2.$$

$$\varphi = \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{x} \left[\ln \eta + \frac{A_1}{2} \eta - \frac{A_1}{16} \eta^2 + \frac{1}{3} \left(-4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{2}{8} A_1^2 \right) \eta^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left(3 + A_1 - \frac{A_1^2}{8} \right) \eta^4 + \frac{7}{12} - \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{96} A_1^2 \right]. \quad (47)$$

Для того, чтобы получить зависимость между напряжением трения у стенки, толщиной турбулентного и пограничного слоя, скорости на внешней границе пограничного слоя и градиентом статического давления приравняем, следуя Карману (см. ссылку 14), скорости на внешней границе ламинарного подслоя, полученные из распределения скоростей в турбулентном ядре пограничного слоя и из распределения скоростей в самом ламинарном подслое.

Распределение скоростей в ламинарном подслое:

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} \quad (15)$$

при приведении его к безразмерному виду дает:

$$\frac{u}{v_*} = \varphi = \frac{v_* \delta}{\nu} \eta + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\rho \nu v_*^2} \frac{\partial p}{\partial x} v_* = \frac{v_* \delta}{\nu} \eta + \frac{1}{2} \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{v_* \delta}{v_*^2}. \quad (48)$$

Полагая

$$\frac{v_* \delta}{\nu} = R_1 \quad (49)$$

и замечая, что

$$\frac{1}{\rho} \delta \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\delta}{\tau_0} \frac{\partial p}{\partial x} = A_1,$$

получим

$$\varphi = R_1 \eta + \frac{A_1}{2} R_1 \eta^2. \quad (50)$$

На внешней границе ламинарного подслоя

$$\eta = \eta_n = \frac{\delta_n}{\delta}, \quad (51)$$

что, принимая во внимание соотношение (13), дает:

$$\eta_n = \frac{\delta_n}{\delta} = \frac{\alpha \nu}{v_* \delta} = \frac{\alpha}{R_1}. \quad (52)$$

Таким образом, скорость на внешней границе ламинарного подслоя, согласно (48) будет:

$$\varphi_n = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1}. \quad (53)$$

Скорость основной турбулентной части пограничного слоя на внешней границе ламинарного подслоя, согласно (46) будет:

$$\varphi_n = \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{x} \left[B_0 \ln \frac{\alpha}{R_1} + B_1 \frac{\alpha}{R_1} + \frac{1}{2} B_2 \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} B_1 \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^4 + \dots - B_1 - \frac{1}{2} B_2 - \frac{1}{3} B_3 - \frac{1}{4} B_4 - \dots \right]. \quad (54)$$

Приравнявая φ_n по (53) и (54), получим закон сопротивления:

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = \alpha + \frac{1}{x} \left[-\ln \frac{\alpha}{R_1} - B_1 \frac{\alpha}{R_1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} B_2 \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^2 - \frac{1}{3} B_3 \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^3 - \frac{1}{4} B_4 \left(\frac{\alpha}{R_1} \right)^4 - \dots \right. \\ \left. + B_1 + \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{3} B_3 + \frac{1}{4} B_4 + \dots \right], \quad (55)$$

поскольку всегда $B_0 = 1$.

Принимая во внимание, что α есть величина порядка 10, тогда как R_1 обычно бывает порядка 1000, можно в законе сопротивления (исключая случаев, когда значение параметра A_1 велико) пренебречь членами, содержащими R_1 , R_2^2 , R_1^3 и R_1^4 в знаменателе.

Тогда:

$$\frac{u_\delta}{v_*} = \alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha + \frac{1}{\alpha} \left[\ln R_1 + B_1 + \frac{1}{2} B_2 + \frac{1}{3} B_3 + \frac{1}{4} B_4 + \dots \right]. \quad (56)$$

В частности, подставляя значения коэффициентов B_1 , B_2 , B_3 и B_4 , согласно (23) в выражение (56), получим:

$$\frac{u_\delta}{v_*} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \left[\ln R_1 + \frac{A_1}{4} - \frac{A_1^2}{96} \right], \quad (57)$$

где

$$\alpha = \alpha - \frac{1}{\alpha} \ln \alpha - \frac{7}{12\alpha}. \quad (58)$$

Сравнивая полученную формулу (56) с логарифмическим законом сопротивления Кармана (37), который может быть написан в виде:

$$\frac{u_\delta}{v_*} = \alpha + \frac{1}{\alpha} \ln R_1. \quad (59)$$

Мы обнаруживаем, что зависимость (56) является обобщением закона Кармана на случай обтекания профиля внешним потоком при положительных градиентах давления в предположении независимости критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя от продольного градиента давления. В пределе при отсутствии градиента давления, т. е. при $A_1 = 0$ зависимость (56) переходит в закон Кармана.

Естественно предполагать, что с увеличением критерия A_1 влияние его на закон сопротивления должно возрастать. Поэтому зависимости типа (56) можно применять лишь при значениях критерия A_1 , для которых члены формулы сопротивления, зависящие от A_1 , возрастают при возрастании A_1 .

В частности, для выражения (57) максимум членов, зависящих от A_1 , имеет место при $A_1 = 12$. Отсюда следует целесообразность применения выражения (57) только при

$$A_1 < 12. \quad (60)$$

Чтобы выяснить, насколько зависимость (57) лучше соответствует действительности (при наличии градиента давления) по сравнению с зависимостью (59) опытные данные, полученные Фейджем и Фолкнером (см. ссылку 9) для пограничного слоя симметричного крыла Жуковского были обработаны в анаморфозах

$$\frac{u_\delta}{v_*} = f(\ln R_1)$$

и

$$\frac{u_\delta}{v_*} = \varphi \left(\ln R_1 + \frac{A_1}{4} - \frac{A_1^2}{96} \right),$$

при которых опытные точки, согласно зависимости (57) и (59) должны ложиться на прямые. Исходные данные и обработка приведены в табл. 1. Результаты нанесены на фиг. 8 и 9.

Таблица 1

Колонка 2 взята по фиг. 10 работы Фейджа и Фолькнера. Колонка 3—по фиг. 6 той же работы. Колонка 4—по фиг. 12 той же работы. Колонка 5 определена графическим диференцированием распределения давления, согласно табл. V той же работы¹

№	x м	u_δ м/сек	τ_0 кг/м ²	δ м	$\frac{\partial p}{\partial x}$ кг/м ³	v_* м/сек	A_1	$\frac{u_\delta}{v_*}$	R_1	$\ln R_1$	$\frac{A_1}{4}$	$\frac{A_1^2}{96}$	$\ln R_1 +$ $\frac{A_1}{4} - \frac{A_1^2}{96}$
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	0,403	29,2	0,239	0,00721	39,7	1,381	1,20	21,15	687	6,53	0,300	—0,015	6,815
2	0,454	28,8	0,217	0,00799	44,1	1,316	1,622	21,05	726	6,59	0,405	—0,0274	6,968
3	0,508	28,3	0,1965	0,00807	24,8	1,254	1,018	22,60	698	6,55	0,254	—0,0108	6,793
4	0,554	27,9	0,1845	0,0101	26,4	1,214	1,448	23,00	845	6,74	0,362	—0,0218	7,080
5	0,610	27,4	0,1735	0,01122	32,65	1,180	2,115	23,22	915	6,82	0,528	—0,0465	7,301
6	0,655	27,0	0,170	0,01248	36,6	1,166	2,68	23,20	1001	6,91	0,620	—0,0748	7,455
7	0,7119	26,4	0,183	0,0137	36,0	1,142	3,03	23,15	1080	6,98	0,757	—0,0918	7,645
8	0,755	25,85	0,145	0,01473	35,3	1,077	3,58	34,94	1092	7,00	0,920	—0,1337	7,785
9	0,8135	24,90	0,1175	0,01622	34,25	0,970	4,72	25,65	1085	6,99	1,18	—0,2325	7,937
10	0,855	24,40	0,110	0,01722	29,2	0,937	4,56	26,0	1113	7,02	1,14	—0,2165	7,943
11	0,907	23,85	0,103	0,01885	34,3	0,907	6,27	26,25	1180	7,07	1,57	—0,410	8,230
12	0,964	23,4	0,0895	0,01995	39,4	0,845	8,77	27,65	1163	7,06	2,195	—0,709	8,546

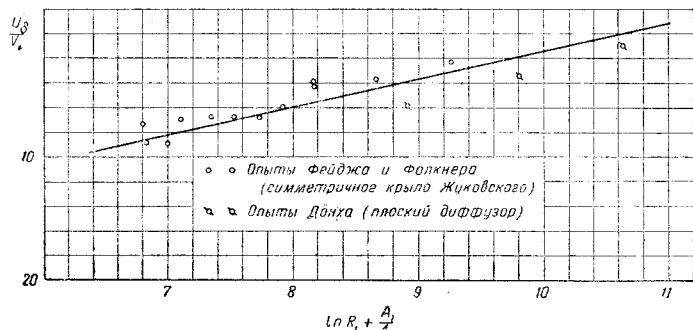
¹ Мы пользуемся случаем отметить, что в подписях фиг. 14—18 первой части даны неправильные значения продольного градиента давления. Следует также отметить, что скачок в продольных градиентах давления, наблюдаемый в колонке 5, происходит, вследствие недостаточной точности эксперимента, так как умозрительно нет никаких оснований для уменьшения градиента в точках 3 и 4, а также в точках с 8 по 11. Если подсчеты параметра A_1 произвести, беря для всех точек средний градиент давления, равный 34 кг/м³, то точки фиг. 9 лучше укладываются на прямую.

The graph plots the ratio $\frac{U_\delta}{V_*}$ on the y-axis against $\ln R_r$ on the x-axis. The y-axis has major ticks at 10 and 20. The x-axis has major ticks at 4, 5, 6, and 7. A series of data points (open circles) are plotted, showing a linear trend. A solid line is drawn through the data points, starting from approximately $\ln R_r = 4.2$ and $\frac{U_\delta}{V_*} = 0$ and extending to $\ln R_r = 7.2$ and $\frac{U_\delta}{V_*} = 25$.

$\ln R_r$	$\frac{U_\delta}{V_*}$
6.5	21
6.5	22
6.6	23
6.7	24
6.8	24
6.9	24
7.0	24
7.0	25
7.0	26
7.1	27
7.2	28

Figure 9 is a scatter plot with a line of best fit. The vertical axis is labeled $\frac{U_c}{U_s}$ and has major tick marks at 10 and 20. The horizontal axis is labeled $\ln R_1 + \frac{A_1}{4} - \frac{A_1^2}{96}$ and has major tick marks at 5, 6, 7, 8, and 9. There are approximately 15 data points represented by open circles. A solid straight line is drawn through the data points, showing a positive linear correlation. The data points are roughly located at (6.8, 22), (6.9, 21), (6.9, 23), (7.0, 22), (7.1, 23), (7.2, 24), (7.3, 23), (7.4, 24), (7.5, 23), (7.6, 24), (7.7, 25), (7.8, 26), (7.9, 27), (8.0, 28), (8.1, 27), (8.2, 28), (8.3, 29), (8.4, 30).

Фиг. 9



Фиг. 9а

константы κ ($\kappa \approx 0,102$) и вдобавок отсекает на оси ординат отрицательный отрезок.

При обработке же в анаморфозе $\frac{u_\delta}{v_*} = \varphi \left(\ln R_1 + \frac{A_1}{4} - \frac{A_1^2}{96} \right)$ опытные точки лучше ложатся на прямую (фиг. 9), которая дает вполне удовлетворительное значение константы κ ($\kappa \approx 0,38$), а также отсекает на оси ординат положительный отрезок¹.

Таким образом, нельзя не признать, что при наличии градиента давления зависимость (56) лучше отображает действительность, нежели зависимость (59).

Подставляя в (55) значения коэффициентов B_1 , B_2 и т. д. согласно (24') и (23'), получим, пренебрегая, членами содержащими в знаменателе R_1^2 и R_1^3 следующие два закона сопротивления, пригодные при всех положительных значениях параметра A_1 :

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = a_1 + \frac{1}{\kappa} \left[\ln R_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{A_1}{R_1} + \frac{A_1}{6} \right], \quad (61)$$

где

$$a_1 = \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha - \frac{5}{6\kappa}; \quad (58')$$

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = a_2 + \frac{1}{\kappa} \left[\ln R_1 - \frac{\alpha}{2} \frac{A_1}{R_1} + \frac{A_1}{4} \right], \quad (61'')$$

где

$$a_2 = \alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha - \frac{1}{2\kappa}. \quad (58'')$$

Эти законы сопротивления при значениях параметра $A_1 < 10$ можно применять также в следующем виде:

$$\frac{u_\delta}{v_*} = a_1 + \frac{1}{\kappa} \left[\ln R_1 + \frac{A_1}{6} \right], \quad (57')$$

$$\frac{u_\delta}{v_*} = a_2 + \frac{1}{\kappa} \left[\ln R_1 + \frac{A_1}{4} \right], \quad (57'')$$

На фиг. 9-а дана обработка опытных данных Фейджа и Фолкнера для пограничного слоя крыла и опытных данных Донха для плоского диффузора².

Интересно отметить, что достаточно разнородные опыты удовлетворительно ложатся на одну прямую.

7. Для получения законов сопротивления, годных при положительных значениях A_1 , можно также пользоваться интерполированием $\frac{\tau}{\tau_0}$, при этом

¹) Графическое решение трансцендентного уравнения $\alpha - \frac{1}{\kappa} \ln \alpha - \frac{7}{12\kappa} = a$ дает при $\kappa = 0,3805$ и $a = 3,7$ (что соответствует прямой на фиг. 9) $\alpha = 11,8$, что неплохо согласуется с ранее определенными значениями этой величины. Следует, конечно, иметь в виду, что разброс опытных точек при внешней задаче должен быть неизбежно большим, чем при задаче внутренней, так как при внешней задаче с достаточной степенью точности определяется лишь величина u_δ , тогда как при внутренней задаче с достаточной степенью точности определяется как u_δ (скорость на оси), так и v_* (по перепаду давления) и δ (половина ширины канала и радиус трубы).

² Следует заметить, что закон сопротивления (57''), дающий столь хорошие результаты при небольших значениях параметра A_1 , не годится при больших параметрах A_1 , так как совокупность граничных условий, при которых этот закон получен, дает при больших значениях параметра A_1 сильно преувеличенные значения величин $\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$,

для того, чтобы взять интеграл в конечном виде, приходится довольствоваться совокупностью условий (I), (II) и (III). Для этого случая уравнение (45) при законе для безразмерного пути смешения, согласно (42) принимает следующий вид:

$$\frac{u}{v_*} = \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{x} \int_1^\eta \frac{\sqrt{1 + A_1 \eta + A_2 \eta^2}}{\eta} d\eta. \quad (62)$$

Приведем подинтегральную функцию к рациональному виду.

Согласно формулы (6) первой части этой работы коэффициент при η^2

$$A_2 = -1 - A_1 \quad (63)$$

отрицателен при положительных градиентах давления. Поэтому, мы должны разделить выражение, стоящее под радикалом на величину

$$k = 1 + A_1. \quad (64)$$

Тогда

$$\int \frac{\sqrt{1 + A_1 \eta + A_2 \eta^2}}{\eta} d\eta = \sqrt{k} \int \frac{\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{A_1}{k} \eta - \eta^2}}{\eta} d\eta. \quad (65)$$

Преобразуем радикал в рациональную форму путем подстановки:

$$\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{A_1}{k} \eta - \eta^2} = \sqrt{(\eta - 1) \left(-\frac{1}{k} - \eta \right)} = -(\eta - 1) z; \quad (66)$$

поскольку

$$k - 1 = A_1. \quad (67)$$

Возвысив (66) в квадрат и сократив на $\eta - 1$, получим:

$$z^2 = \frac{-\frac{1}{k} - \eta}{\eta - 1} = \frac{\frac{1}{k} + \eta}{1 - \eta}, \quad (68)$$

или

$$\eta = \frac{z^2 - \frac{1}{k}}{z^2 + 1}. \quad (69)$$

Отсюда:

$$d\eta = \frac{2 \left(1 + \frac{1}{k} \right) z dz}{(z^2 + 1)^2} = \frac{2Bz dz}{(z^2 + 1)^2} \quad (70)$$

если положить:

$$1 + \frac{1}{k} = B. \quad (71)$$

Далее

$$\sqrt{\frac{1}{k} + \frac{A_1}{k} \eta - \eta^2} = -(\eta - 1) z = \frac{\left(1 + \frac{1}{k} \right) z}{z^2 + 1} = \frac{Bz}{z^2 + 1}. \quad (72)$$

Подставляя (72), (70) и (69) в (65) и интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+A_1\eta+A_2\eta^2}}{\eta} d\eta &= \sqrt{k} \int \frac{Bz2Bz(z^2+1)}{(z^2+1)(z^2+1)^2\left(z^2-\frac{1}{k}\right)} dz = \\ &= 2\sqrt{k}B^2 \int \frac{z^2 dz}{\left(z^2-\frac{1}{k}\right)(z^2+1)^2} = \\ &= 2\sqrt{k}B^2 \left[L_1 \ln \frac{z + \sqrt{\frac{1}{k}}}{z - \sqrt{\frac{1}{k}}} + \frac{N_1}{2} \frac{z}{1+z^2} + \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \operatorname{arctg} z \right], \end{aligned} \quad (73)$$

где

$$L_1 = - \frac{1}{2 \left[\left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{1.5} + 2 \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{0.5} + \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{-0.5} \right]}; \quad (74)$$

$$N_1 = - \frac{2 \left(\frac{1}{1+A_1} + 1 \right) L_1}{\sqrt{\frac{1}{1+A_1}}}; \quad (75)$$

$$N_2 = 2 \sqrt{\frac{1}{1+A_1}} L_1. \quad (76)$$

Переходя снова к переменному η , принимая во внимание (64) и (71), получим окончательно:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{u}{v_*} = \frac{u_\delta}{v_*} + \\ &+ \frac{2\sqrt{1+A_1} \left(1 + \frac{1}{1+A_1} \right)^2}{z} \left[L_1 \ln \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2} - \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{1/2}} + \right. \\ &+ \frac{N_1}{2} \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2}}{1 + \frac{1}{1+A_1} + \eta} + \left. \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2} \right] = \\ &= \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{2\sqrt{1+A_1} \left(1 + \frac{1}{1+A_1} \right)^2}{z} \left[L_1 \ln \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2} - \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{1/2}} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{N_1}{2} \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2}}{1 + \frac{1}{1+A_1} + \eta} + \\
& + \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1+A_1} + \eta \right)^{1/2} - \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \frac{\pi}{2} \quad (77)
\end{aligned}$$

так как первые два члена квадратных скобок при $\eta=1$ при раскрытии неопределенностей обращаются в нуль.

Используя полученное распределение скоростей (77) при $\eta = \eta_n = \frac{\alpha}{R_1}$ [см. формулу (52)], мы можем получить значение скорости основной турбулентной части пограничного слоя на внешней границе ламинарного подслоя:

$$\begin{aligned}
\varphi_n &= \frac{u_\delta}{v_*} + \\
& + \frac{2\sqrt{1+A_1} \left(1 + \frac{1}{1+A_1} \right)^2}{\alpha} \left[L_1 \ln \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1} \right)^{1/2}}{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1} \right)^{1/2}} + \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{1/2} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{1+A_1} \right)^{1/2} \right] + \\
& + \frac{N_1}{2} \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1} \right)^{1/2}}{1 + \frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}} + \\
& + \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{N_1}{2} + N_2 \right) \frac{\pi}{2} \quad (78)
\end{aligned}$$

С другой стороны, скорость на внешней границе ламинарного подслоя согласно (53) будет:

$$\varphi_n = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1}. \quad (53)$$

Приравнявая φ_λ по (78) и (53), получим закон сопротивления:

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = \alpha + \frac{1}{\alpha} 2\sqrt{1+A_1} \left(1 + \frac{1}{1+A_1}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[L_1 \ln \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{1+A_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{1+A_1}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{N_1}{2} \frac{\left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 + \frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}} - \right.$$

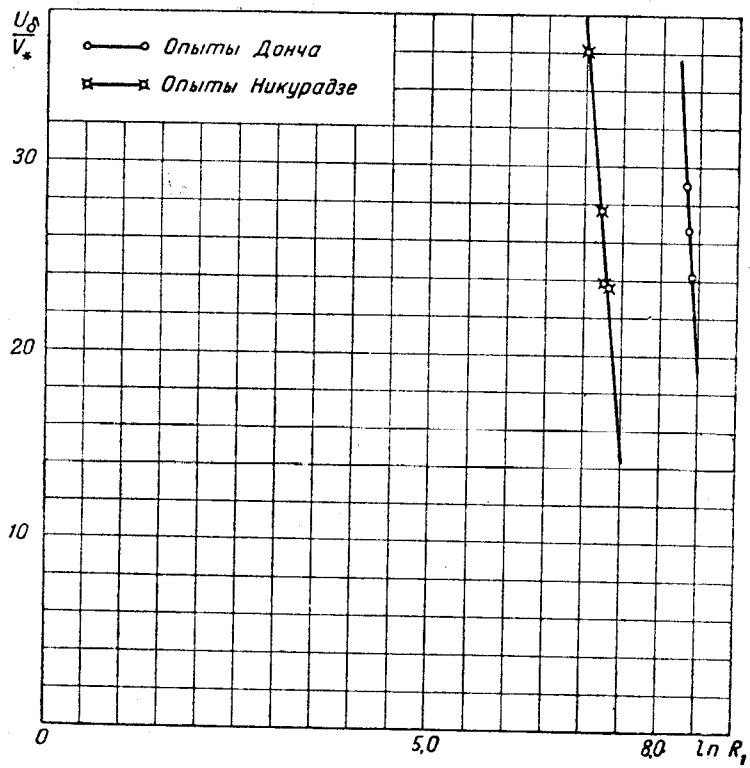
$$\left. - \left(\frac{N_1}{2} + N_2\right) \arctg \left(\frac{1}{1+A_1} + \frac{\alpha}{R_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{N_1}{2} + N_2\right) \frac{\pi}{2} \right] = \alpha + \frac{1}{\alpha} F(A_1, \alpha, R_1) \quad (79)$$

пригодный для любых положительных значений параметра A_1 . При этом предполагается независимость критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя от продольного градиента давления.

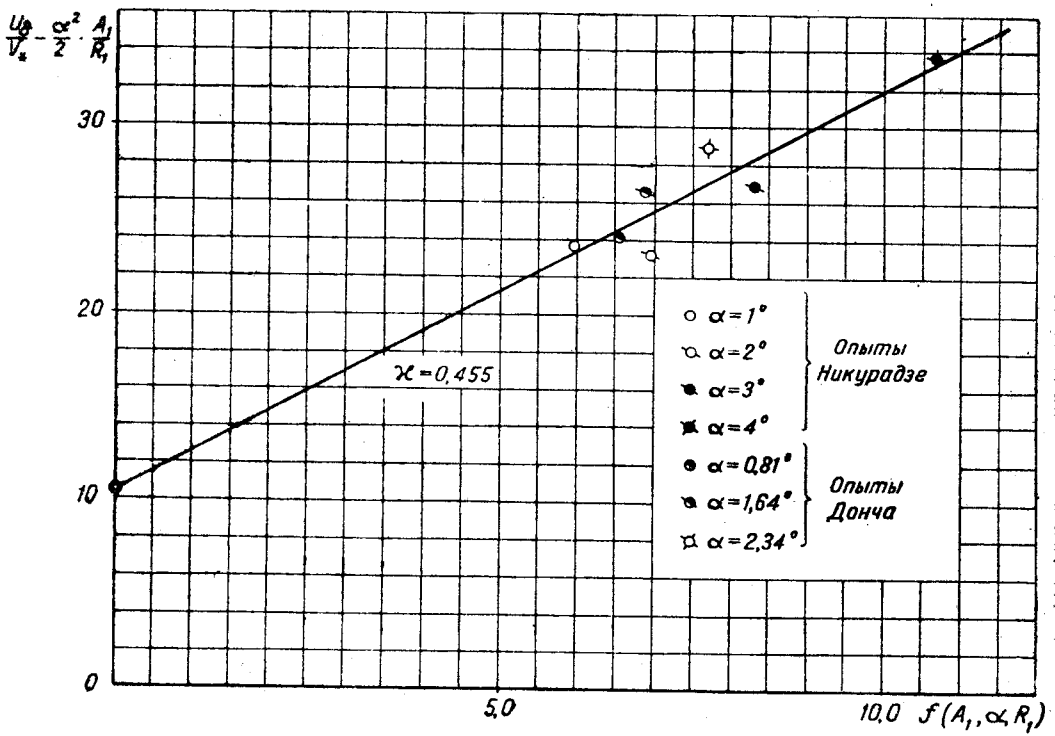
Строго говоря, поскольку зависимость (79) учитывает влияние продольного градиента давления на профиль скоростей турбулентной части пограничного слоя, в ламинарном подслое необходимо было бы также толщину ламинарного подслоя определять из выражения для критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя, написанного с учетом продольного градиента давления, т. е. из кубического уравнения (16). Для того, чтобы выяснить, насколько сильно влияет замена безразмерной толщины ламинарного подслоя, определенной с учетом продольного градиента давления [т. е. по уравнению (16)] безразмерной толщиной ламинарного подслоя, определенной без учета продольного градиента давления (т. е. величиной $\frac{\alpha}{R_1}$), был проделан также подсчет $F(A_1, \alpha, R_1)$ для диффузора с макси-

мальным значением параметра A_1 , принимая вместо $\frac{\alpha}{R_1}$ величину η_λ определенную по уравнению (16). Для диффузора с углом раствора 4° , испытанного Никурадзе, разница между толщинами ламинарного подслоя, определенными с учетом и без учета градиента давления составляет 9,7% от толщины ламинарного подслоя с учетом градиента. Величина же $F(A_1, \alpha, R_1)$ меняется при замене $\eta_\lambda = \frac{\delta_\lambda}{\delta}$ определенной с учетом градиента на $\frac{\alpha}{R_1}$ всего на 1%. Пренебрежение же влиянием продольного градиента давления на профиль скоростей в ламинарном подслое [т. е. пренебрежением вторым членом левой части уравнения (79)], дает для того же диффузора изменение левой части уравнения (79) на 6,8%.

Таким образом, при предположении о независимости критического числа Рейнольдса ламинарного подслоя от продольного градиента давления (которое приходится в настоящее время делать в силу отсутствия каких-либо данных о влиянии продольного градиента на критическое число Рейнольдса ламинарного подслоя) представляется необходимым при больших значениях параметра A_1 учитывать влияние продольного градиента давления на профиль скоростей в ламинарном подслое и в то же время представляется возможным пренебрегать влиянием продольного градиента на величину толщины ламинарного подслоя.



Фиг. 10



Фиг. 11

Чтобы выяснить, насколько зависимость (79) лучше соответствует действительности (при наличии градиента давления) по сравнению с зависимостью (59), опытные данные, полученные Донхом (см. ссылку 7) и Никурадзе (см. ссылку 16) для плоских диффузоров были обработаны в анаморфозах $\frac{u_\delta}{v_*} = f(\ln R_1)$

и

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = F(A_1, \alpha, R_1).$$

При этом за скорость u_δ бралась скорость по оси диффузора, а за толщину пограничного слоя δ бралась половина ширины диффузора. Для опытов Донха кинематическая вязкость бралась равной $14,5 \cdot 10^{-6}$ м²/сек. (воздух), для опытов Никурадзе кинематическая вязкость бралась равной $1,35 \cdot 10^{-6}$ (вода). Исходные данные и обработка приведены в табл. 2. Результаты нанесены на фиг. 10 и 11. При этой обработке опытные точки, согласно зависимости (59) и (79) должны ложиться на прямые, причем в анаморфозе $\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = F(A_1, \alpha, R_1)$ прямая должна отсекасть по оси ординат отрезок равный α (при расчете бралось $\alpha = 10,47$).

При обработке в обычной логарифмической анаморфозе (фиг. 10), во-первых, через опытные точки Донха и Никурадзе нельзя провести одной общей прямой, а, во-вторых, прямые, проведенные через опытные точки Донха и Никурадзе, дают отрицательные значения универсальной константы α , что явно абсурдно.

При обработке тех же опытов в анаморфозе (фиг. 11).

$$\frac{u_\delta}{v_*} - \frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1} = F(A_1, \alpha_1, R_1)$$

опытные точки достаточно удовлетворительно (отклонение точек от прямой не превосходит 8,6%) ложатся на прямую, проходящую через расчетную точку на оси ординат, в особенности, принимая во внимание, что опытные точки представляют собой результаты экспериментов различных исследователей на различных установках. Кроме того, следует иметь в виду, что разброс опытных точек при исследовании диффузоров неизбежно должен быть большим, чем при исследовании нерасширяющихся каналов или труб в силу того, что при исследовании диффузоров из четырех величин, входящих в зависимость (79) с достаточной степенью точности известна лишь половина ширины диффузора — δ и скорость на оси диффузора u_δ . Из двух же других величин $\frac{\partial p}{\partial x}$ определяется в результате численного дифференцирования, а τ_0 или в результате численного дифференцирования или, обходясь без численного дифференцирования — в результате не совсем правильного предположения о том, что линиями тока являются лучи, проходящие через вершину диффузора. Наклон прямой, проведенной на фиг. 11 дает вполне приемлемое значение универсальной константы α ($\alpha = 0,455$).

На основании вышеизложенного, нельзя не признать, что при наличии градиента давления зависимость (79) лучше отображает действительность, нежели зависимость (59).

Попутно небезинтересно привести зависимость параметра A_1 по углам растворения диффузора на основании опытов Донха и Никурадзе. Эта зависимость представлена на фиг. 12. Интересно отметить, что, несмотря на различие в установках, на различие в относительных расположениях измерительных сечений и, наконец, на различие в числах Рейнольдса из-

Данные колонок 1 и 3 заимствованы из табл. 5 работы Никурадзе и табл. 20 работы
работы

	α°	1 $\frac{u_0}{\rho} \frac{m}{сек}$	2 $\frac{\tau_0}{\rho} \frac{m}{сек^2}$	3 α_m	4 $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \frac{m^2}{сек^2}$	5 $u_* \frac{m}{сек}$	6 $\frac{u_0}{v_*}$	7 A_1	8 $\sqrt{1+A_1}$	9 R_1	10 $\ln R_1$	11 $\frac{A_1}{R_1}$	12 $\frac{\alpha^2}{2} \frac{A_1}{R_1}$
Опыты Никурадзе	1	4,2	0,0310	0,0110	17,25	0,1760	23,85	6,14	2,67	1434	7,27	0,004275	0,235
	2	2,9	0,0150	0,0165	10,85	0,1225	23,70	11,92	3,59	1499	7,32	0,00797	0,438
	3	2,4	0,0075	0,0215	8,04	0,0866	27,70	23,85	4,99	1376	7,23	0,01731	0,954
	4	1,98	0,0030	0,0276	5,10	0,0548	36,10	45,80	6,85	1095	7,01	0,0418	2,300
Опыты Донха	0,81	16,26	0,4517	0,0965	9,35	0,672	24,2	1,995	1,73	4460	8,41	0,000447	0,0246
	1,64	11,52	0,1874	0,1435	7,48	0,433	26,6	5,73	2,59	4280	8,37	0,001335	0,0736
	2,34	12,38	0,1829	0,1409	11,86	0,4275	29,0	9,15	3,19	4150	8,34	0,0022	0,1211

	α°	24 $\frac{(21)}{(20)} - \frac{(21)}{(21)}$	25 $\ln(24)$	26 L_1	27 $L_1 \ln(24)$	28 $\frac{(20)}{1+(19)}$	29 $\arct(20)$	30 $2\sqrt{1+A_1}$	31 $(30) \cdot (15)$
Опыты Никурадзе	1	0,0145	— 4,23	— 0,1438	0,61	0,335	0,37	5,35	6,93
	2	0,0237	— 3,745	— 0,12	0,45	0,269	0,29	7,20	8,36
	3	0,0452	— 3,10	— 0,0926	0,2865	0,21	0,22	10,00	10,80
	4	0,0943	— 2,36	— 0,0702	0,1654	0,171	0,17	13,70	14,3
Опыты Донха	0,81	0,001726	— 6,37	— 0,1624	1,033	0,433	0,53	3,46	6,17
	1,64	0,00517	— 5,27	— 0,146	0,770	0,340	0,37	5,18	6,84
	2,34	0,00633	— 5,07	— 0,1305	0,662	0,2885	0,31	6,38	7,7

¹ Опытная точка Донха при угле растворения диффузора в 2,92° не принята во вни

мерительных сечений (числа Рейнольдса в измерительных сечениях у Донха в среднем в три раза больше, чем у Никурадзе), опытные точки позволяют предполагать некоторую общую для обоих экспериментов зависимость параметра A_1 от угла растворения диффузора¹.

Некоторым косвенным подтверждением правильности предположения о постоянстве параметра A_1 по длине диффузора служит также тот факт, что подсчеты потерь в диффузоре, произведенные при малых углах растворения, принимая постоянство коэффициента сопротивления по длине диффузора, дают хорошее совпадение с опытом. Постоянство же коэффициента сопротивления соответствует постоянству параметра A_1 по длине диффузора. В самом деле коэффициент сопротивления

$$\lambda = \frac{dH}{\frac{dl}{4r_h} \frac{\rho u_{cp}^2}{2}},$$

Донха. Данные колонок 2 и 4 заимствованы из табл. 13 работы Никурадзе и табл. 18 Донха¹

13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$\frac{u_0}{u_*} - \frac{a^2}{2} \frac{A_1}{R_1}$	$\frac{1}{1+A_1}$	$\left(1 + \frac{1}{1+A_1}\right)^2$	$\frac{a}{R_1}$	$\frac{a}{1+A_1} + \frac{1}{R_1}$	$1 - \frac{a}{R_1}$	$\frac{(17)}{(18)}$	$\left[\frac{(17)}{(18)}\right]^{\frac{1}{2}}$	$\left(\frac{1}{1+A_1}\right)^{\frac{1}{2}}$	$(20) - (21)$	$(20) + (21)$
23,615	0,1400	1,3	0,00731	0,14731	0,9927	0,1483	0,385	0,3740	0,0110	0,759
23,262	0,0775	1,161	0,007	0,0845	0,993	0,0851	0,292	0,2785	0,0135	0,5705
26,746	0,0403	1,08	0,00762	0,0479	0,9924	0,0483	0,220	0,2010	0,0190	0,421
33,800	0,0214	1,043	0,00958	0,0309	0,9904	0,0312	0,1765	0,1461	0,0304	0,3226
24,175	0,334	1,78	0,00235	0,33675	0,9976	0,337	0,580	0,578	0,002	1,158
26,526	0,1485	1,32	0,002445	0,15094	0,9976	0,1512	0,389	0,385	0,004	0,774
28,879	0,0986	1,206	0,002525	0,10113	0,9975	0,1014	0,318	0,314	0,004	0,632

32	33	34	35	36	37	38	39	40
N_1	$\frac{N_1}{2}$	$\frac{N_1}{2} (28)$	N_2	$N_2 + \frac{N_1}{2}$	$\left(\frac{N_1}{2} + N_2\right) \times \left(\frac{N_1}{2} \times (29)\right)$	$\left(\frac{N_1}{2} + N_2\right) \times \frac{\pi}{2}$	$(27) + (34) + (38) + (37) + (28)$	$(31) \cdot (39)$
0,877	0,438	— 0,147	— 0,1074	0,3306	— 0,1222	0,52	0,861	5,97
0,928	0,463	— 0,1247	— 0,0669	0,3961	— 0,1150	0,625	0,8353	6,99
0,960	0,480	— 0,1006	— 0,037	0,443	— 0,0976	0,695	0,7833	8,50
0,980	0,490	— 0,084	— 0,02045	0,46955	— 0,0800	0,745	0,7464	10,66
0,750	0,3745	— 0,1622	— 0,1878	1,1867	— 0,0991	0,293	1,0647	6,57
0,872	0,435	— 0,148	— 0,1123	0,3227	— 0,1192	0,507	1,0098	6,91
0,914	0,457	— 0,1315	— 0,082	0,3750	— 0,1162	0,589	1,0033	7,72

мание, как явно выпадающая.

где dl — элемент длины, r_h — гидравлический радиус,

$u_{cp} = \frac{Q}{F}$ средняя по расходу скорость. Напряжение трения в случае плоского диффузора:

$$\tau_0 = -\frac{dH}{dx} r_h = -\frac{dH}{dx} \delta = -\frac{\lambda}{4} \frac{\rho u_{cp}^2}{2} - u_{cp}^2 - \frac{Q^2}{\delta^2} - \frac{Q^2}{x^2}$$

Дифференцируя по x уравнение

$$H = \frac{1}{2} \rho u_{cp}^2 + p,$$

получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho u_{cp} \frac{\partial u_{cp}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} = -\rho \frac{Q}{\delta} \frac{\partial \left(\frac{Q}{\delta}\right)}{\partial x} - \frac{\tau_0}{\delta} - \frac{Q^2}{\delta^3}$$

Подставляя τ_0 и $\frac{\partial p}{\partial x}$, выраженные через δ , в выражение, определяющее параметр A_1 , будем иметь:

$$A_1 = \frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} \sim \frac{\delta Q^2 \delta^2}{\delta^3 Q^2} \sim 1$$

постоянным по длине диффузора.

С другой стороны, то обстоятельство, что

$$\tau_0 \sim \frac{1}{x^2}$$

соответствует предположению о радиальности линий тока в диффузоре.

Таким образом можно предполагать, что постоянство параметра A_1 вдоль диффузора осуществляется с той же точностью, с которой можно предполагать радиальность линий тока.

Для получения более точного профиля скоростей в плоском диффузоре можно не ограничиваться совокупностью условий (I), (II), (III), а использовать также условие (IV) и условие для производной напряжения трения на оси диффузора.

Это условие получается из рассмотрения дифференциального уравнения (1) при $y = \delta$, т. е. на оси диффузора. При этом $u = u_\delta$; $v = 0$ (в силу симметрии) и

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho u_\delta^2}{2} + p \right) = \frac{\partial H}{\partial x} \neq 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta} \right)} = \frac{\delta \frac{\partial H}{\partial x}}{\tau_0} \neq 0. \quad (V'')$$

В этом условии сказывается отличие диффузора от пограничного слоя (сравнить с условием V для пограничного слоя).

При малых углах растворения, при которых всю потерю энергии можно отнести за счет трения, для плоского диффузора (в предположении равномерного распределения потерь по сечению), будем иметь:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\tau_0}{\delta},$$

Подставляя полученное значение градиента полной энергии в (V''), получим:

$$\frac{\partial \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)}{\partial \eta} = \frac{\delta \frac{\partial H}{\partial x}}{\tau_0} = -1.$$

При совокупности этого условия и условий (I), (II), (III), (IV) коэффициенты полинома

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + A_1 \eta + A_2 \eta^2 + A_3 \eta^3 + A_4 \eta^4$$

принимают следующий простой вид:

$$A_2 = 0; A_3 = -3(A_1 + 1); A_4 = 2(A_1 + 1).$$

Интересно отметить физическую интерпретацию, которую получает параметр A_1 , если принять $\frac{\tau_0}{\delta} = - \frac{\partial H}{\partial x}$.

Тогда $A_1 = -\frac{\delta \frac{\partial p}{\partial x}}{\tau_0} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial x}}$ будет представлять собою отношение гра-

диента статического давления к градиенту полной энергии.

Подобные же рассуждения могут быть без труда проделаны и для конического диффузора.

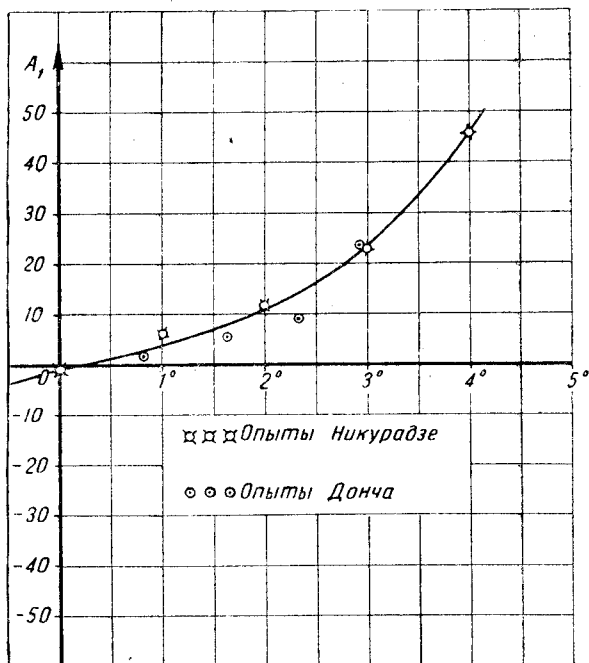
Вопросу об использовании изложенной теории для расчета диффузоров будет посвящена специальная статья.

8. Возможность интерполировать

$\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}$ приводит нас к крайне простым формулам распределения скоростей, примером чего может служить формула (47) параграфа 6 этой части.

Перепишем эту формулу в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{u - u_\delta}{v_*} = & \frac{1}{\alpha} \left[\ln \eta - \frac{4}{3} \eta^3 + \right. \\ & + \frac{3}{4} \eta^4 + \frac{7}{12} + \frac{A_1}{2} \eta + \\ & + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2 \right) \eta^3 + \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(A_1 - \frac{A_1^2}{8} \right) \eta^4 - \frac{A_1}{4} + \frac{A_1^2}{96} \right]. \end{aligned} \quad (47')$$



Фиг. 12

Члены, стоящие в квадратных скобках, можно разбить на 3 группы: I группа, содержащая логарифм, II группа — члены не содержащие параметра A_1 (со второго члена и по четвертый включительно); III группа — члены, содержащие параметр A_1 . Первый член, соответствующий формуле распределения скоростей Прандтля—Никурадзе, получается, как известно, при принятии постоянства напряжения трения. Прибавление к первому члену второй группы членов соответствует переходу от постоянства напряжения трения к профилю напряжения трения, соответствующему действительному пограничному слою плоской пластинки¹ (движение жидкости вдоль пластины при отсутствии градиента давления, но наличии инерционных сил; напряжение трения на внешней границе пограничного слоя равно нулю). Наконец, прибавление к первым двум группам еще и третьей группы членов, содержащей параметр A_1 , соответствует переходу от профиля напряжения трения пограничного слоя плоской пластинки к профилю напряжения трения плоского пограничного слоя с наличием инерционных сил и градиента давления.

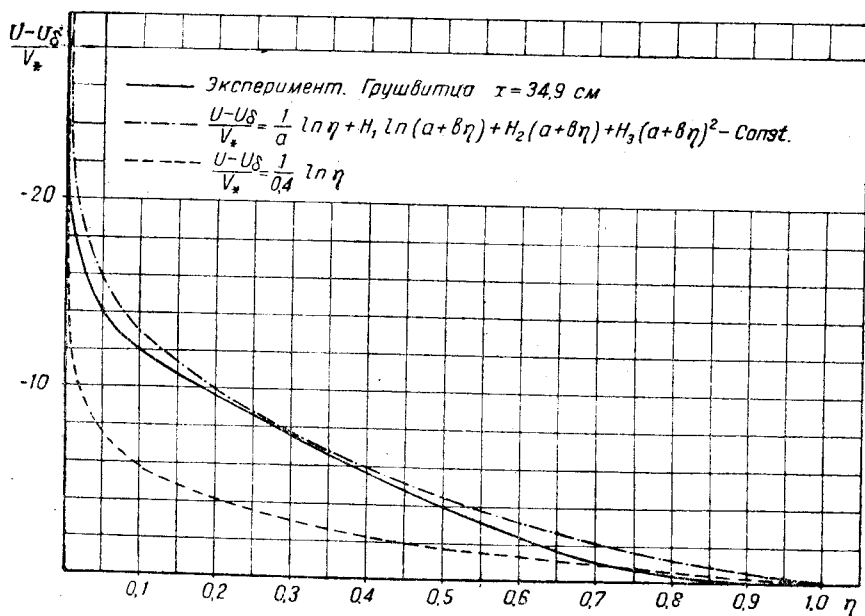
Для получения более точных профилей скоростей необходимо вместо линейного распределения безразмерного пути смещения взять более слож-

¹ Если среди граничных условий при этом не принимать условия о равенстве производной напряжения трения на внешней границе пограничного слоя нулю, а заменить это условие условием (V'') , то полученный профиль напряжения трения будет соответствовать движению в плоском диффузоре при угле раствора, при котором градиент давления равен нулю, тогда как инерционные силы имеют место.

ную зависимость, лучше отвечающую опыту. В первой части этой работы в качестве такой зависимости бралась интерполяционная формула Прандтля [см. формулу (13') первой части]. Однако, эта зависимость настолько громоздка, что сильно усложняет последующие операции. Поэтому зависимость безразмерного пути смещения от безразмерного расстояния от стенки, полученная на основании опытов Никурадзе в круглой и прямоугольных гладких трубах (см. ссылку 16 и 17), в шероховатых круглых трубах (см. ссылку 18), а также Фритше в лотке (см. ссылку 10) была аппроксимирована более простой формулой¹:

$$\frac{l}{\delta} = a\eta + b\eta^2 = 0,33\eta - 0,195\eta^2. \quad (80)$$

Предполагая попрежнему возможным в первом приближении считать безразмерные пути смещения, зависящими лишь от безразмерного расстояния от стенки, можно для области, непосредственно не лежащей у точки отрыва, за зависимость безразмерного пути смещения от безразмерного расстояния от стенки брать зависимость, полученную рядом авторов для внутренней задачи.



Фиг. 13

Совершенно несомненно, что при переходе от внутренней задачи к внешней безразмерные пути смещения будут несколько изменяться. Однако, сравнение путей смещения, полученных при испытаниях в трубе (т. е. при наличии градиента давления и отсутствии инерционных сил) и при испытаниях диффузоров (т. е. при наличии и градиенте давления и инерционных сил), произведенное в первой части этой работы (фиг. 6, 7, 8 и 9 I части), показывает, что изменение в безразмерных путях смещения невелико по сравнению с изменением профилей напряжения трения². Безразмерные пути смещения, полученные для диффузоров, можно в первом приближении принять за пути смещения для внешней задачи.

Если считать, что изменение безразмерных путей смещения при переходе от внутренней задачи к внешней такое же, как при переходе от нерасширяющегося канала к диффузору, согласно опытам Никурадзе, то для

¹ Эта аппроксимация была по моей просьбе любезно выполнена Л. Е. Калихманом.

² Интересно отметить, что напряжения трения в диффузорах на некоторых расстояниях от стенок в 10, 20 и даже 40 раз разнятся от напряжения трения в нерасширяющемся канале (четырёхугольная труба) при том же перепаде давления (см. табл. 8 работы Никурадзе).

выяснения возможности пренебрегать изменением безразмерного пути смещения при переходе от внутренней задачи к внешней естественно посмотреть, каким углом растворения диффузора (и, соответственно, какой кривой безразмерного пути смещения для диффузора) соответствуют условия для пограничного слоя крыла при наличии положительного градиента давления. Оказывается, что эти условия за исключением области, лежащей непосредственно у отрыва, соответствуют углу растворения диффузора всего в $1-2^\circ$.

Отсюда следует, что, при переходе от внутренней задачи к внешней, безразмерный путь смещения изменяется значительно меньше, чем напряжения трения внутри пограничного слоя.

Результаты опытов Хеege Циннена (см. ссылку 12) по определению безразмерных путей смещения в пограничном слое плоской пластинки (отсутствие градиента давления, но наличие инерционных сил) показывают, что и при внешней задаче характер изменения безразмерного пути смещения такой же, как в нерасширяющемся канале.

Подставляя зависимость (80) в формулу (45) при совокупности условий (I'), (II'), (III') и (IV'), получим:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{u}{v_*} &= \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}} d\eta = \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{1 + \frac{A_1}{2} \eta - \frac{A_1^2}{8} \eta^2 + B_3 \eta^3}{a \eta + b \eta^2} d\eta = \\ &= \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{d\eta}{\eta(a + b \eta)} + \int_1^\eta \frac{\frac{A_1}{2} d\eta}{a + b \eta} - \int_1^\eta \frac{\frac{A_1^2}{8} \eta d\eta}{a + b \eta} + \int_1^\eta \frac{B_3 \eta^3 d\eta}{a + b \eta} = \\ &= \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{a} \ln \eta + H_1 \ln(a + b \eta) + H_2(a + b \eta) + H_3(a + b \eta)^2 - \text{const}, \end{aligned} \quad (81)$$

где:

$$H_1 = -\frac{1}{a} + \frac{A_1}{2b} + \frac{aA_1^2}{8b^2} + \frac{a^2B_3}{b^3}, \quad (82)$$

$$H_2 = -\frac{A_1^2}{8b^2} - \frac{2aB_3}{b^3}, \quad (83)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \frac{B_3}{b^3}, \quad (84)$$

$$\text{const} = H_1 \ln(a + b) + H_2(a + b) + H_3(a + b)^2. \quad (85)$$

Для принятой совокупности условий

$$B_3 = -1 - \frac{A_1}{2} + \frac{A_1^2}{8}. \quad (24)$$

Кроме этого, согласно (80),

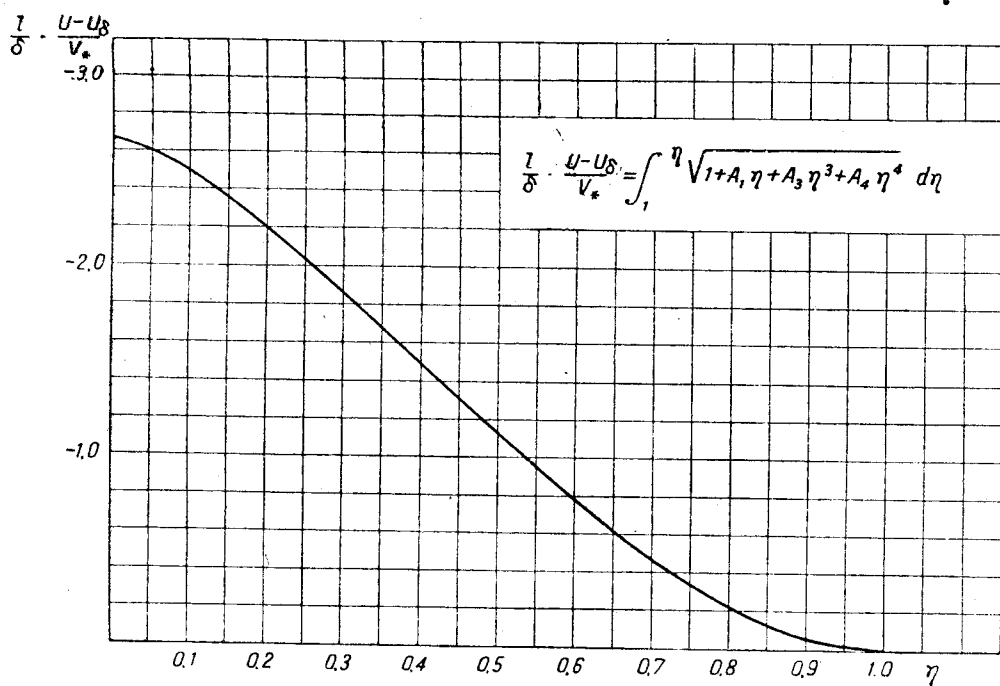
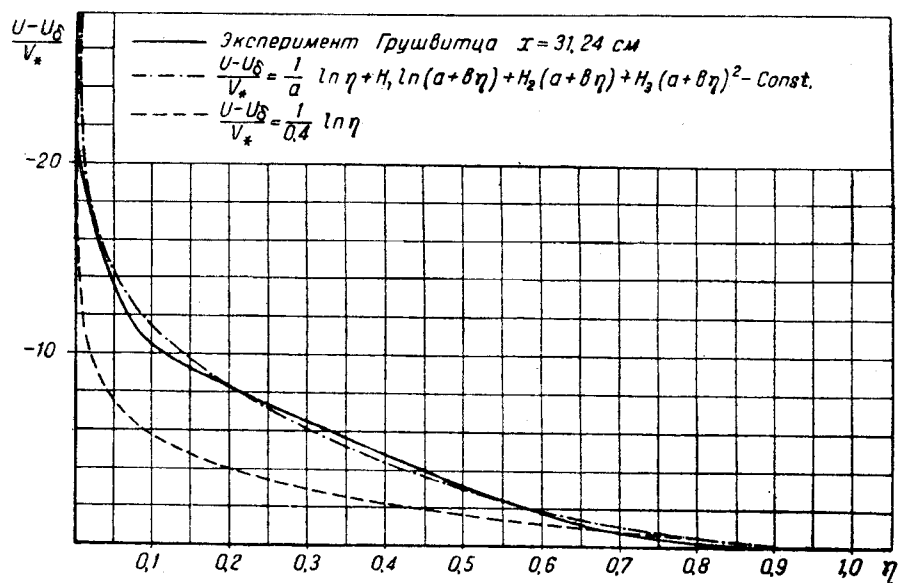
$$a = 0,33; \quad b = -0,195.$$

На фиг. 13 и 14 даны экспериментальные профили скорости для двух сечений пограничного слоя верхней поверхности крыла по опытам Грушвитца (см. ссылку 10) при угле атаки $\alpha = 12^\circ$. Профили скорости, построенные для тех же сечений по формуле (81), дают достаточно хорошее совпадение с экспериментальными профилями. Для сравнения на тех же фигурах нанесены профили скоростей, согласно формуле Прандтля—Никурадзе (см. ссылку 17):

$$\frac{u}{v_*} = \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{0,4} \ln \eta. \quad (86)$$

При совокупности условий (I'), (II'), (III'), (IV') и (V') мы аналогично формуле (81) будем иметь:

$$\varphi = \frac{u}{v_*} = \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{\sqrt{\frac{\tau}{\tau_0}}}{\frac{l}{\delta}} d\eta = \frac{u_\delta}{v_*} +$$



Фиг. 15

$$+ \int_1^\eta \frac{1 + \frac{A_1}{2} \eta - \frac{A_1^2}{8} \eta^2 + B_3 \eta^3 + B_4 \eta^4}{a \eta + b \eta^3} d\eta = \frac{u_\delta}{v_*} + \int_1^\eta \frac{d\eta}{\eta(a + b \eta)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_1^{\eta} \frac{\frac{A_1}{2} d\eta}{a+b\eta} - \int_1^{\eta} \frac{\frac{A_1^2}{8} \eta d\eta}{a+b\eta} + \int_1^{\eta} \frac{B_3 \eta^2 d\eta}{a+b\eta} + \int_1^{\eta} \frac{B_4 \eta^3 d\eta}{a+b\eta} = \\
& = \frac{u_\delta}{v_*} + \frac{1}{a} \ln \eta + k_1 \ln(a+b\eta) + k_2(a+b\eta) + k_3(a+b\eta)^2 + k_4 \eta^3 - \text{const}, \quad (87)
\end{aligned}$$

где:

$$k_1 = -\frac{1}{a} + \frac{A_1}{2b} + \frac{aA_1^2}{8b^2} + \frac{a^2B_3}{b^3} - \frac{a^3B_4}{b^4}, \quad (88)$$

$$k_2 = -\frac{A_1^2}{8b^2} - \frac{2aB_3}{b^3} + \frac{2a^2B_4}{b^4}, \quad (89)$$

$$k_3 = \frac{1}{2} \frac{B_3}{b^3} - \frac{1}{2} \frac{aB_4}{b^4}, \quad (90)$$

$$k_4 = \frac{B_4}{3b}, \quad (91)$$

$$\text{const} = k_1 \ln(a+b) + k_2(a+b) + k_3(a+b)^2 + k_4 \quad (92)$$

При принятой совокупности условий:

$$\left. \begin{aligned} B_3 &= -4 - \frac{3}{2} A_1 + \frac{1}{4} A_1^2 \\ B_4 &= 3 + A_1 - \frac{1}{8} A_1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Следует отметить, что полученные формулы (81) и (87) несравненно проще аналогичной формулы (22) первой части работы.

К сожалению, законы сопротивления, соответствующие распределению скоростей (81) и (87), получаются все же настолько сложными, что вряд ли могут быть применены для решения внешней задачи.

В заключение интересно рассмотреть, каковы будут кривые распределения скоростей при больших значениях параметра A_1 . Как показывает фиг. 9 первой части работы, безразмерные пути смещения с увеличением параметра A_1 (с увеличением угла растворения диффузора) стремятся к постоянству по сечению плоского диффузора. Последнее вполне естественно, принимая во внимание, что поток в диффузоре после отрыва можно до известной степени уподобить свободной струе, в которой, как известно, безразмерный путь смещения постоянен по сечению. Если построить профиль скоростей, используя интерполяцию (1) первой части работы при совокупности условий (I), (II), (III), (IV) и (V), принимая при $A_1=50$ постоянство безразмерного пути смещения, мы получим профиль скоростей, изображенный на фиг. 15. Этот профиль уже чрезвычайно близок к отрывному.

Для самой точки отрыва, т. е. при $\tau_0=0$ формула распределения скоростей (в предположении постоянства величины $\frac{l}{\delta}$ по сечению) принимает следующий вид:

$$\frac{l}{\delta} \frac{u - u_0}{p_*} = \int_1^{\eta} f(\eta) d\eta, \quad (93)$$

где

$$p_* = \sqrt{\frac{\delta \frac{dp}{dx}}{\rho}}$$

[см. формулу (21) первой части работы].

При этом, (как это видно из выражении (43), при $\frac{e}{\delta} \neq 0$ условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0 \text{ соблюдается.}$$

Законы распределения скорости и законы сопротивления трения, полученные в этой работе при использовании их в интегральном соотношении Кармана, дают возможность определить распределение интенсивности трения по крыловому профилю с учетом положительного градиента давления, следовательно, также определить в первом приближении область, в которой происходит отрыв турбулентного пограничного слоя, как область, в которой напряжение трения интенсивно стремится к нулю.

Автор приносит глубокую благодарность проф. Л. Г. Лойцянскому за ряд весьма ценных замечаний и инж. Н. Н. Фоминой за помощь в некоторых выкладках п. 7.

Вычисления в этой работе произведены главным образом техником П. Е. Курятниковой и отчасти техником В. И. Авдониной, которым автор выражает свою признательность.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

1. Гуржиенко Г. А. Влияние вязкости и жидкости на законы турбулентного течения в прямой цилиндрической трубе с гладкими стенками. Труды ЦАГИ, вып. 303 1936
2. Федяевский К. К. Влияние состояния пограничного слоя на лобовое сопротивление хорошо обтекаемых тел. Техн. заметки ЦАГИ, 30, 1932.
3. Федяевский К. К. Пограничный слой и лобовое сопротивление тел вращения при больших числах Рейнольдса. Труды ЦАГИ, вып. 179 1934.
4. Федяевский К. К. Турбулентный пограничный слой крыла*. Часть I, о профиле напряжения трения и скоростей. Труды ЦАГИ, вып. 282, 1936.
5. Ханович И. Г. Пограничный слой. ОНТИ 1936.
6. Buri A. Eine Berechnungsgrundlage für die turbulente Grenzschicht bei beschleunigter und verzögerter Grundströmung. Promotionsarbeit Buchdruckerei A. G. Jean Frey, Zuerich. 1931.
7. Doench E. Divergente und kohvergente turbulente Strömungen mit kleinen Oefnungswinkeln. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 282, Berlin, 1926.
8. Dryden H. L. Aerodynamic of cooling. Aerodynamic Theory, William Frederic Durand, Editor-in-Chief, Volume VI.
9. Fage A. and Falkner V. N. An experimental determination of the intensity of friction on the surface of an aerofoil. Aeronautic Research Committee. R. & M. N. 1315, London 1931.
10. Fritsch. Der Einfluss der Wandrauhigkeit auf die turbulente Geschwindigkeitsverteilung in Rinnen. Zeitschrift für angewandte Math. und Mechanik Band 8. Heft 3, 1928, 215.
11. Gruschwitz. Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Göttingen Dissertation. Ingenieur-Archiv. 11 Band, 3 Heft, 1931.
12. Van der Hegge Zijnen B. G. Measurements on the distribution of the velocity, the shearing stress and the characteristic length in the boundary layer along a series of bars (Grating.) Reprinted from: Proceedings Vol. XXXIV, N. 6, 1931. Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.
13. Karman Th. v. Ueber laminare und turbulente Reibung, Zeitschrift für angewandte Mathematik. und Mechanik Bd. 1. Heft 4 1921.
14. Karman Th. v. Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1930. S. 58. Th. v. Karman, Mech. Aehnlichkeit und Turbulenz, Verhandl. 3. Intern. Kongr. Techn. Mech. Stockholm 1930.
15. Karman Th. v. Turbulence and skin friction, J. A. S. Volume N. 1.
16. Nikuradse J. Untersuchungen über die Strömungen des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen. Forschungsheft N. 289, Berlin.
17. Nikuradse J. Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. Forschungsheft N. 356. Berlin 1932.
18. Nikuradse J. Strömungsgesetz in rauhen Rohren Forschungsheft N. 361, Berlin. 1933.
19. Del-Nunzio B. La distribuzione dei vortici nelle condotte chiuse in regime turbulente e laminare, Elettrotecnica, N. 14, 1931.
20. Peters H. On the separation of turbulent boundary layers. J. of the Aeron. sciences, v. III, N. 1, 1935, p. 7.
21. Prandtl L. Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Ztschr. ang. Math. u. Mechn. 5, (1925) S. 136. L. Prandtl, Neuere Turbulenzforschung. Hydraul. Probleme 1926.
22. Prandtl. Ausgebildete Turbulenz, Verhandl. 2. Intern. Kongr. Techn. Mech. Zürich, 1926.
23. Prandtl, L. The mechanics of viscous fluids. Aerodynamic theory. William Frederick Durand. Editor-in-Chief. Volume III.
23. Simmons L. F. G and Brown A. F. C. Experimental investigation of boundary layer flow. ARC, R. & M. N. 1547, 1935.

S u m m a r y

The present investigation represents a continuation of the work described in the Reports of the Joukovsky Central Institute of Aerohydrodynamics N 282.

A new method of the power law of resistance is developed allowing to express the numerical coefficient in the resistance law at any exponent in terms of the critical Reynolds number of the laminar sublayer.

The polynomial interpolation of the square root of the value of the frictional stresses in a turbulent boundary layer allows to obtain much simpler laws of velocity distribution as compared with those of the first part of the work. In the case of accepting the Prandtl mixing line to be proportional to the distance from the wall, formulae of velocity distribution are obtained which in a particular case (without a pressure gradient and inertia forces) give the Prandtl-Nikuradse formula.

The use of this law of velocity distribution leads to a very simple law of friction resistance which represents the generalisation of the Karman logarithmic law of resistance [for the case of a two dimensional boundary layer with a positive pressure gradient.

At the same time the ratio of boundary layer thickness to the frictional stresses at the wall is shown to be independent of the Reynolds number for a laminar boundary layer, the same proposition prevailing for a turbulent boundary layer in the case of similitude of velocity profiles in geometrically similarly distributed sections.

The use of velocity distribution law as obtained from polynomial interpolation of frictional stresses in a turbulent boundary layer leads to a more complicated resistance law.

The work gives as well the interpretation of experimental data as obtained by Fage and Falkner for a symmetrical Joukovsky aerofoil and by Doench and Nikuradse for flat diffusers which show that in the presence of pressure gradient the suggested resistance laws correspond better with real conditions than the logarithmic resistance law.

Отв. редактор В. Л. Александров

Техн. редактор А. С. Борисов

Сдано в набор 13/III 1937 г.
Формат бумаги $70 \times 108 \frac{1}{16}$
Уполн. Главлита № Б-16957

Подписано к печати 15/IV 1937 г.
 $2\frac{1}{2}$ печ. листа по 66000 зн. в листе
Зак. № 947

Тираж 800 экз.

Типография Госбанка. Москва, Неглинная, 12

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ АВТОРА

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
8	10 сверху	$y_1 dw \sin w = dz$	$y_1 dw \sin w = dz_1$
13	3 "	$R_{x1} = R_x \cos \alpha - R_z \sin \alpha$	$R_{x1} = R_x \cos \beta - R_z \sin \beta$
13	4 "	$R_{z1} = R_z \cos \alpha + R_x \sin \alpha$	$R_{z1} = R_z \cos \beta + R_x \sin \beta$
13	2 снизу	$l = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{R_{mz}}{R_{y1}} \right)$	$l = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{R_{mz}}{R_{y1}} \right) \left(\frac{\frac{dR_{mz}}{d\alpha}}{\frac{dR_y}{d\alpha}} \right)_{\alpha=0}$
15	Фиг. 15	Чертеж следует повернуть на 180°	
20	Фиг. 25 По оси ординат	0,1; 0,2; 0,3; 0,4; — 0,1; — 0,15;	0,2; 0,4; 0,6; 0,8; — 0,2; — 0,3
21	Фиг. 26 По оси ординат	0,05; 0,1	0,1; 0,2
24	Фиг. 29 По оси ординат	0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; Сп оперения ; — 0,1; — 0,2 — 0,3	0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2 $C_{y1 \text{ опер}} ; - 0,2; - 0,4; - 0,3$
	Фиг. 33	По оси ординат сверху поставить $\frac{p}{\dots}$.	
31	Фиг. 35	Масштаб погонной нагрузки дан в кг/м	
35	11 снизу	— m линейных	m — линейный
53	5 сверху	$\frac{L^3_{\kappa}}{U_{\kappa}} = \frac{L^3_{\sigma}}{U_{\sigma}} =$	$\frac{L^3_{\kappa}}{U_{\kappa}} = \frac{L^3_{\sigma}}{U_{\sigma}}$
53	7 "	$\frac{\pi}{6} \frac{L_{\kappa}}{U_{\kappa}}$	$\frac{\pi}{6} \frac{L^3_{\kappa}}{U_{\kappa}}$
55	19 снизу	$\frac{dY}{dx_1} =$	$\frac{dY_1}{dx_1} =$
56	Фиг. 64	Чертеж следует повернуть на 180°.	
59	9 сверху	$= \frac{dS}{dx_1} = \sin 2 \beta q +$	$= \frac{dS}{dx_1} \sin 2 \beta q +$
64	7 "	будет турбулентен,	будет турбулентен, а также, что поверхность дирижабля в первом приближении можно заменить эквивалентной пластинкой,